MANTIQIY FUNKSIYALARNI KVEYN – MAK-KLASKI USULI БИЛАН MINIMALLASHTIRISH

Eshniyozov Abdumalik Iskandarovich
GulDU, Matematika kafedrasi dotsenti
Allayorova Iroda Sherzod qizi
GulDU, Matematika kafedrasi magistri

Kvain teoremasi (Kveyn deb ham yuritiladi) 1952-yilda amerikalik mantiqchi va faylasuf Uillard Van Orman Kvain (Willard Van Orman Quine) tomonidan taklif etilgan.

Kvain mantiqiy funksiyalarni soddalashtirish uchun yopishtirish va yutilish amallaridan foydalanishni taklif qildi. Uning asosiy g'oyasi — barcha mumkin bo'lgan yopishtirish amallarini ketma-ket bajarish orqali funksiyaning qisqartirilgan shaklini hosil qilish edi.

Mantiqiy asosi: $AX \vee A\overline{X} = A$.

Kvain teoremasi. Agar mantiqiy funksiyaning mukammal diz’yunktiv normal shaklida (MDNSH) barcha to‘liqsiz yelimlash amallari, so‘ngra barcha yutilish amallari bajarilsa, natijada ushbu funksiyaning qisqartirilgan diz’yunktiv normal shakli (QDNSH) hosil bo‘ladi.

Teorema shuni isbotlaydiki, agar mantiqiy funksiyaning barcha qo'shni termlari orasida to'liq bo'lmagan yopishtirish amali bajarilsa va keyin barcha yutilish amallari amalga oshirilsa, natijada hosil bo'lgan diz'yunksiya funksiyaning barcha oddiy implikantlari to'plamidan iborat bo'ladi.

Qisqartirilgan shakldan minimal shaklga o’tish uchun implikantli matritsa (Kvayn jadvali) usulidan foydalaniladi. Bu jarayon quyidagi qadamlardan iborat:

1. Implikantli matritsani tuzish.

Matritsaning satrlariga Kvayn teoremasi orqali topilgan barcha oddiy implikantlar, ustunlariga esa funktsiyaning dastlabki mintermlari (MDNSh to’plamlari) yoziladi. Agar implikant ma’lum bir mintermni yopsa, tegishli katakka «×» belgisi qo’yiladi.

2. Yadroni (muhim implikantlarni) aniqlash. Eng muhim bosqich – faqat bitta «×» belgisi bo’lgan ustunlarni topish. Bu degani, ushbu mintermni faqat bitta implikant yopa oladi va u albatta minimal shaklga kirishi shart. Bunday implikantlar muhim implikantlar (yadro) deb ataladi.

3. Qolgan ustunlarni yopish. Muhim implikantlar tanlab olingach, ular yopgan barcha ustunlar o’chiriladi. Agar hali ham yopilmay qolgan ustunlar bo’lsa, ularni yopish uchun qolgan implikantlar ichidan eng qisqalari (eng kam literlilari) tanlanadi.

4. Minimal DNShni yozish. Tanlab olingan barcha implikantlar diz’yunktsiya (qo’shish) bilan birlashtiriladi. Natijada MDNSh (Minimal diz’yunktiv normal shakl) hosil bo’ladi.

Misol uchun: Agar sizda bir nechta tupikli shakllar hosil bo’lsa, ular ichidan belgilar soni eng kami tanlanadi.

Kichik bir amaliy misol orqali implikantli matritsa bilan ishlashni ko’rib chiqamiz.

Aytaylik, biz Kvayn usulining birinchi bosqichini bajardik va quyidagi natijalarga ega bo'ldik:

- Mintermlar (dastlabki to'plamlar): 1,3,7.
- Oddiy implikantlar (yopishtirish natijalari): $A = (1,3), B = (3,7)$.

Implikantli matritsa ko'rinishi:

Implikantlar			
$A = (1,3)$	×	×	
$B = (3,7)$		×	×

Matritsani tahlil qilish:

1. 1-ustunga qaraymiz: Uni faqat A implikanti yopadi (yagona ×). Demak, A — muhim implikant.
2. 7-ustunga qaraymiz: Uni faqat B implikanti yopadi (yagona ×). Demak, B — muhim implikant.
3. 3-ustun esa ham A, ham B tomonidan yopilgan, lekin bizda albatta olinishi kerak bo'lgan implikantlar (A va B) allaqachon bu ustunni yopib bo'ldi.

Yakuniy minimal shakl: $F = A \vee B$.

Agar jadval murakkab bo'lsa va muhim implikantlar hamma ustunni yopmasa, unda qolgan × belgilari ichidan eng kam satrni tanlash talab etiladi.

Implikantlar ajratib olingandan so'ng, mantiqiy funktsiyaning dastlabki mukammal normal shakli mintermlariga mos keluvchi bir nechta ustunlar yopilmay qolganda yuzaga keladi. Bunday holatda eng maqbul variantni tanlash uchun Petrik (Petrik)usuli (logik ko'paytirish orqali barcha variantlarni topish) qo'llaniladi.

Bu usul jadvalda «yadro» (muhim implikantlar) ajratib olingandan so'ng, hali ham yopilmay qolgan ustunlar mavjud bo'lgan holatlarda qo'llaniladi.

Bu usul barcha mumkin bo'lgan yopish variantlarini bitta mantiqiy ifodaga yig'ish imkonini beradi.

1. Mantiqiy o'zgaruvchilarni belgilash: Har bir oddiy implikant (satr) uchun alohida lotin harfini $(P_1, P_2, \dots)$ biriktiramiz.
2. Ustunlar uchun ifoda tuzish: Har bir yopilmay qolgan ustun uchun uni yopa oladigan implikantlar yig'indisini yozamiz.

- Masalan: 3-ustunni P_1 va P_2 satrlari yopsa, biz $(P_1 \vee P_2)$ deb yozamiz.

Ko'paytma ifodani hosil qilish: Barcha ustunlar ifodalarini o'zaro ko'paytiramiz:

$$L = (P_1 \vee P_2)(P_2 \vee P_3) \dots$$

Qavslarni ochish: Bunda Bul algebrasi qonunlaridan foydalaniladi (masalan, $P \cdot P = P$ va $P \vee PQ = P$).

Minimal variantni tanlash: Natijada hosil bo'lgan diz'yunktiv ifodadagi eng qisqa qo'shiluvchi — biz izlayotgan minimal qoplama bo'ladi.

Masalan: Agar matritsada ikkita ustun qolgan bo'lsa va:

- 1-ustunni P_1 va P_2 satrlari yopsa,
- 2-ustunni P_2 va P_3 satrlari yopsa

Ifoda: $(P_1 \vee P_2)(P_2 \vee P_3) = P_1 \vee P_2 P_3$

Bu erda ikkita variant bor:

1. Faqat P_2 implikantini olish (eng minimal variant).
2. P_1 va P_3 implikantlarini birgalikda olish.

Kvayn teoremasiga asoslangan usul ikkita muhim kamchilikka ega.

Birinchidan, minimizatsiya qilishning boshlang’ich bosqichida, ya’ni MAFning qisqartirilgan diz’yunktiv yoki kon’yunktiv shaklini olishda, funktsiyaning dastlabki ko’rinishidagi har bir hadni, so’ngra to’liq bo’lmagan yelimlash amallari funktsiyani tashkil etuvchi va soni borgan sari ortib borayotgan boshqa barcha implikantlar bilan doimiy ravishda solishtirishga to’g’ri keladi. Faqatgina yutilish bosqichida implikantlar soni umumiy holatda kamayadi.

Ikkinchi kamchiligi implikantli matritsa bo’yicha tupikli shakllarni olishning murakkabligini kiritish lozim. Bu holat muhim implikantlar ajratib olingandan so’ng, mantiqiy funktsiyaning dastlabki mukammal normal shakli mintermlariga mos keluvchi bir nechta ustunlar yopilmay qolganda yuzaga keladi.

Kvainning usuli juda mukammal bo'lsa-da, katta hajmdagi o'zgaruvchilar bilan ishlashda qiyinchilik tug'dirardi. 1956-yilda Edvard Mak-Klaski (Edward McCluskey) ushbu teoremani jadval ko'rinishiga keltirib, uni algoritmlashtirdi. Shuning uchun bugungi kunda bu usul Kvain—Mak-Klaski usuli deb ataladi.

Ushbu takliflarning mohiyati (diz’yunktiv normal shaklda ifodalangan MAFlarga nisbatan) quyidagilardan iborat:

1. MDNSh (Mukammal diz’yunktiv normal shakl) tarkibidagi har bir elementar kon’yunktsiya biror-bir tamoyil asosida, masalan, alifbo tartibida saralanadi va o’z ikkilik to’plami bilan ifodalanadi. Bunda ko’paytmaga to’g’ri shaklda kiruvchi o’zgaruvchiga bir («1»), inversiya (inkor) shaklida kiruvchi o’zgaruvchiga esa nol («0») mos qo’yiladi.

2. To’plamlar raqamlarining (indekslarining) barcha majmuasi ulardagi birlar soniga qarab guruhlarga bo’linadi (0-guruh, 1-guruh, 2-guruh va h.k.). Agar dastlabki majmuada ma’lum bir miqdordagi birlarga ega bo’lgan to’plamlar mavjud bo’lmasa (masalan, bitta birli to’plam bo’lmasa), tegishli guruh (ushbu holatda 1-guruh) baribir yaratiladi, ammo elementlar soni nolga teng bo’ladi.

3. Bir-biridan bitta bir bilan farq qiluvchi ikkita qo’shni guruh elementlari o’zaro solishtiriladi. Bunda ushbu guruhlardan olingan ikkita to’plamning yopishtirilish imkoniyati aniqlanadi, mazkur to’plamlar uchun zarur belgi qo’yiladi va yopishtirish natijasi yoziladi.

4. Jarayon yopishtirish amallarining imkoni boricha davom ettiriladi.

5. Barcha yopishtirilmagan to’plamlar, shuningdek, yopishtirishning yakuniy natijalari MAFning qisqartirilgan normal shakldagi ifodasini beradi.

MAFning belgili ko’rinishini ikkilik ko’rinishga almashtirish uni kompyuterda qayta ishlashni osonlashtiradi, MDNShdagi elementar kon’yunktsiyalarni guruhlarga bo’lish esa o’zaro yopishtirish imkoniyati mavjud bo’lgan to’plamlarni aniqlash uchun variantlarni saralashni sezilarli darajada qisqartiradi.

Buning sababi shundaki, faqat bir xil o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan va ulardan faqat bittasi bilan farq qiladigan to'plamlargina o'zaro yopishishi mumkin. Shu bois, faqat bir-biridan roppa-rosa bitta bir yoki nol bilan farq qiluvchi to'plamlarni, ya'ni qo'shni guruhlar to'plamlarini ko'rib chiqish maqsadga muvofiqdir. Bundan «bo'sh» guruhlarni kiritish zarurati, shuningdek, 0-guruh elementi barcha 1-guruh elementlari bilan, faqat birlardan iborat guruh elementi esa o'zidan oldingi guruhning barcha elementlari bilan «yopishishi» mumkinligi kelib chiqadi.

Misol.

Quyidagi mantiqiy funktsiyani Kvayn – Mak-Klaski usuli bilan minimizatsiyalashtiring:

$$f(a,b,c,d)_{\mathrm{MDNSH}} = ?\,(3,7,8,10,11,12,15).$$

Yechim:

1– bosqich

Ushbu ikkilik to'plamlarni va ularga mos keluvchi belgili ifodalarni (o'zgaruvchilar a, b, c, d deb olinganda) quyidagicha ifodalash mumkin:

Berilgan funktsiyaning MDNSh (SDNF) tarkibini tashkil etuvchi to'plamlarning ikkilik ko'rinishi:

1. $0011 \rightarrow \bar{a}\bar{b}cd$
2. $0111 \rightarrow \bar{a}bcd$
3. $1000 \rightarrow a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
4. $1010 \rightarrow a\bar{b}c\bar{d}$
5. $1011 \rightarrow a\bar{b}cd$
6. $1100 \rightarrow ab\bar{c}\bar{d}$
7. $1111 \rightarrow abcd$

Endigi qadam — ushbu to'plamlarni tarkibidagi birlar («1») soni bo'yicha guruhlarga ajratish.

Bosqichlar bo'yicha davom etamiz:

- 1– guruh (bitta "1"): 1000 (8)
- 2– guruh (ikkita "1"): 0011 (3), 1010 (10), 1100 (12)
- 3– guruh (uchta "1"): 0111 (7), 1011 (11)
- 4– guruh (to'rtta "1"): 1111 (15)

1-qadam. Guruhlarga ajratish va birinchi bosqich yopishtirish

To'plamlarni birlar soni bo'yicha guruhlaymiz va qo'shni guruh elementlarini solishtiramiz. Agar ikkita to'plam faqat bitta razryad bilan farq qilsa, ular yopishtiriladi va farqli razryad o'rniga «–» belgisi qo'yiladi.

1– jadval

Guruhlar	To'plamlar (MDNSH)	Natija
1– guruh (bitta "1")	1000	1000 va 1010→ 10-0 1000 va 1100→ 1-00
2– guruh (ikkita "1")	0011, 1010, 1100	0011 va 0111→ 0-11 0011 va 1011→ -011 1010 va 1010→ 101-

3– guruh (uchta “1”)	0111, 1011	0111 va 1111→ -111 1011 va 1111→ 1-11
4– guruh (to’rtta “1”)	1111	yuqoridagilar bilan yopishtirildi

2-қадам. Иккинчи босқич ёпиштириш имкониятини текшириш

Энди ҳосил бўлган янги тўпламларни (масалан, 10-0 ва 101-) ўзаро солиштирамиз. Иккинчи босқичда ёпиштириш учун «-» белгиси бир хил ўринда бўлиши ва яна битта разряд билан фарқ қилиши керак.

Берилган мисолда иккинчи босқичда ёпиштириладиган тўпламлар мавжуд эмас (чунки «-» белгилари ҳар хил позицияларда).

Натижада биз қуйидаги оддий импликантларни олдик:

1. $10-0 \rightarrow a\bar{b}\bar{d}$
2. $1-00 \rightarrow a\bar{c}\bar{d}$
3. $0-11 \rightarrow \bar{a}cd$
4. $-011 \rightarrow \bar{b}cd$
5. $101- \rightarrow a\bar{b}c$
6. $-111 \rightarrow bcd$
7. $1-11 \rightarrow acd$

Keyingi bosqich – implikantli matritsa (yoki Kveyn jadvali) tuzish. Bu jadval yordamida biz topilgan oddiy implikantlar ichidan eng kam miqdordagilarini tanlab olamiz.

Matritsaning ustunlariga dastlabki funksiyaning mintermlari (0011, 0111, 1000, 1010, 1011, 1100, 1111) yoziladi. Satrlariga esa biz birinchi bosqichda topgan oddiy implikantlar yoziladi.

2– jadval

implikantlar	001 1	011 1	100 0	101 0	101 1	110 0	111 1
$a\bar{b}\bar{d} \rightarrow (10-0)$				+			
$a\bar{c}\bar{d} \rightarrow (1-00)$			+			+	
$\bar{a}cd \rightarrow (0-11)$	+	+					
$\bar{b}cd \rightarrow (-011)$	+				+		
$a\bar{b}c \rightarrow (101-)$				+	+		
$bcd \rightarrow (-111)$		+					+
$acd \rightarrow (1-11)$					+		+

Matritsani tahlil qilish:

1. Muhim implikantlarni aniqlash: Faqat bitta belgi (+) bo'lgan ustunlarni qidiramiz.

- 1000 va 1100 ustunlarida faqat $a\bar{c}\bar{d}$ implikanti bor. Demak, u – muhim implikant.
- 0011 ustunida ikki joyda + bor, lekin 0111 ustuniga qarasak, u faqat $\bar{a}cd$ va bcd bilan yopilgan.

Ushbu jadvaldan ko'rinib turibdiki, biz barcha mintermlarni yopish uchun eng kam miqdordagi implikantlarni tanlashimiz kerak.

Matritsani tahlil qilib, muhim implikantlarni (ya’ni, ustunda yagona "+" belgisi bo’lgan holatlarni) ajratib olamiz:

1. 1000 va 1100 ustunlariga qaraymiz: ularni faqat bitta implikant $a\bar{c}\bar{d} \rightarrow (1-00)$ yopadi. Demak, bu muhim implikant.

2. 0011 va 0111 ustunlarini esa bir nechta implikant yopishi mumkin, lekin jarayonni optimallashtirish uchun eng kam miqdordagilarini tanlaymiz.

Matritsa asosida barcha to’plamlarni yopuvchi minimal diz’yunktiv normal shakl (MDNSh) quyidagicha bo’ladi:

$$F = a\bar{c}d \vee abc \vee \bar{a}cd \vee bcd$$

Bu erda:

- $a\bar{c}d$– 1000 va 1100 to’plamlarini yopadi.
- abc – 1010 va 1011 to’plamlarini yopadi.
- $\bar{a}cd$ – 0011 va 0111 to’plamlarini yopadi.
- bcd – 1111 to’plamini yopadi.

Shunday qilib, biz 7 ta kon’yunktsiyadan iborat mukammal shakldan 4 ta qisqa kon’yunktsiyali minimal shaklga keldik.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Quine, W.V. "The Problem of Simplifying Truth Functions", 1952.
2. McCluskey, E.J. "Minimization of Boolean Functions", 1956.
3. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.,1992.
4. Бауэр Ф.Л., Гооз Г. Информатика. Вводный курс: Часть 2, М.: Мир, 1990.
5. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. школа, 1986.