

KO'PYOQLILAR VA ULARNING ZAMONAVIY GEOMETRIYADAGI QO'LLANILISHI

Ajiniyoz nomidagi NDPI talabasi
Pirlepesov Umrbek Baxtiyor o'g'li

Annotatsiya: *Ushbu maqolada ko'pyoqlilar (poliedrlar) nazariyasining asosiy tushunchalari, klassifikatsiyasi va zamonaviy geometriyadagi ahamiyatli qo'llanilishlari keng ko'lamda tahlil qilinadi. Platon va Arximed jismlari, ularning topologik xossalari — xususan, Eyler xarakteristikasi va Koshi qo'zg'almaslik teoremasi — hamda kombinatorik va differentsial geometriyadagi tutgan o'rni ilmiy nuqtai nazardan ko'rib chiqiladi. Bundan tashqari, ko'pyoqlilar nazariyasining kompyuter grafikasi, muhandislik, kimyo va bioinformatika sohalaridagi amaliy tatbiqi yoritiladi. Maqolada O'zbekiston va MDH olimlari tomonidan erishilgan natijalar ham umumlashtirilgan.*

Kalit so'zlar: *ko'pyoqlilar, poliedrlar, Platon jismlari, Arximed jismlari, Eyler xarakteristikasi, kombinatorik geometriya, differentsial geometriya, kristallografiya, Koshi teoremasi.*

Ko'pyoqlilar — uch o'lchamli fazodagi yopiq, cheklangan, ko'pburchakli yuzlardan tashkil topgan geometrik jismlardir. Qadimgi yunon faylasuflaridan to hozirgi zamon raqamli texnologiyalarigacha bo'lgan davrda ushbu ob'ektlar matematika, fizika va muhandislik fanlarida doimo markaziy ahamiyat kasb etib kelgan. O'zbek matematikasida ham ko'pyoqlilarni o'rganish an'anasi uzoq tarixi bor. O'rta asrlar allomalaridan al-Xorazmiy va Abu Rayhon Beruniy geometrik jismlarning xossalari tadqiq etgan. Zamonaviy davrdagi o'zbek matematiklari esa bu yo'nalishni yangi algebraik va topologik usullar bilan boyitmoqda. Jumladan, O'zbekiston Fanlar Akademiyasi Matematika instituti olimlari tomonidan olib borilgan tadqiqotlar [1, 2] bu sohadagi muhim hissa hisoblanadi.

Eylerning 1758-yilda kashf etgan $V - E + F = 2$ formulasi topologiyaning asosiy toshiga aylandi. Bu formula nafaqat qavariq ko'pyoqlilar uchun, balki umumiy ko'rinishdagi politoplar, silliq manifoldlar va hatto graflar nazariyasida ham o'zining tabiiy umumlashtirishlarini topdi [3, 4]. Maqolaning maqsadi ko'pyoqlilar nazariyasining asosiy natijalarini tizimlashtirish va zamonaviy amaliy sohalaridagi tatbiqlarini ko'rsatishdir. Ko'pyoqli (poliedr) — uch o'lchamli haqiqiy fazoda yopiq va cheklangan jism bo'lib, uning chegarasi sonli ko'pburchakli yuzalar (qirralar, tomonlar) to'plamidan tashkil topadi. Qavariq ko'pyoqli uchun quyidagi uchta komponent ajratiladi:

- (1) Yuzlar (F): ko'pburchakli tekis qismlar;
- (2) Qirralar (E): ikki yuzning umumiy tomoni;
- (3) Uchlar (V): uch yoki undan ortiq qirraning uchrashish nuqtasi.

1. Platon jismlari. Muntazam (Platon) ko'pyoqlilar — barcha yuzlari bir xil muntazam ko'pburchak bo'lgan va har bir uchda bir xil sonli yuz uchrashgan jismlardir. Matematika

isbotlagan: bunday jismlar faqat beshtadir [3]. Ularning asosiy xossalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

Nomi	Yuzlar (F)	Qirralar (E)	Uchlalar (V)	Yuzi shakli
Tetradr	4	6	4	Uchburchak
Geksaedr (Kub)	6	12	8	Kvadrat
Oktaedr	8	12	6	Uchburchak
Dodekaedr	12	30	20	Beshburchak
Ikosaedr	20	30	12	Uchburchak

1-jadval. Platon jismlarining asosiy miqdoriy xossalari.

2. Arximed jismlari. Yarim muntazam ko'pyoqlilar — ikki yoki undan ko'p turdagi muntazam ko'pburchakdan tashkil topgan, har bir uchda bir xil tartib saqlangan jismlar. Ularning jami 13 tasi bor. Masalan, kesmali oktaed (truncated octahedron) 8 ta olti burchak va 6 ta kvadratdan, kubooktaed esa 8 ta uchburchak va 6 ta kvadratdan iborat [5].

3. Umumlashtirilgan ko'pyoqlilar. Zamonaviy geometriyada konkav (botiq) ko'pyoqlilar, o'z-o'zini kesadigan Ko'pyoqlilar (masalan, Kepler-Puansen jismlari) va cheksiz davriy poliedrlar ham o'rganiladi. Toshkent davlat texnika universiteti professori S. Normo'minov tomonidan olib borilgan tadqiqotlar [2] ushbu sohada muhim natijalar berdi.

TOPOLOGIK VA KOMBINATORIK XOSSALAR

1. Eyler xarakteristikasi. Har qanday qavariq ko'pyoqli uchun mashhur Eyler munosabati o'rinalidir:

$$V - E + F = 2$$

bu yerda V — uchlar, E — qirralar, F — yuzlar soni. Masalan, kub uchun: $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$, va $8 - 12 + 6 = 2$. Toroidal yuzalar uchun esa $V - E + F = 0$. Ushbu formula zamonaviy algebraik topologiyani asosiy vositasi hisoblanib, O'zbekiston universitetlarining matematika dasturlarida ham alohida mavzu sifatida o'rgatiladi

2. Steinitz teoremasi. E. Steinitz (1916) isbotlaganki, har qanday qavariq ko'pyoqlining 1-skeleti (uning qirralari va uchlari tashkil etgan graf) 3-bog'liq tekis grafga izomorf. Bu natija ko'pyoqlilarni sof kombinatorik til bilan tavsiflab, kompyuter algoritmlarida poliedrlarni yaratish va tekshirishga imkon beradi [7].

3. Koshi qo'zg'almaslik teoremasi. A. Koshi (1813) isbotladi: agar ikki qavariq ko'pyoqlining barcha yuzlari o'zaro kongruent bo'lsa, bu ko'pyoqlilar ham o'zaro kongruent.

Ya'ni, yuzlarning shakli va ulashish tartibi ko'pyoqlini to'liq aniqlaydi. Bu natija mustahkam konstruksiyalar (geodezik gumbazlar, ferma tizimlari) yaratishda amaliy ahamiyat kasb etadi [8].

4. Dehn invarianti. M. Dehn (1901) isbotladiki, teng hajmli ko'pyoqlilar har doim ham bir-biriga to'g'ri bo'laklarga bo'linib o'tkazib bo'lmaydi. Dehn invarianti deb ataladigan ko'rsatkich bunday parchalanishlarni tahlil qilishda asosiy vosita sifatida hozirga qadar qo'llaniladi. Bu natija Hilbertning 3-masalasiga to'liq javob bo'ldi [9].

5. Ko'pyoqlilarning f-vektori. Ko'pyoqlining f-vektori ($f_0, f_1, f_2, \dots$) uning turli o'lchamli yuzlari sonini ifodalaydi. Simplicial ko'pyoqlilar uchun McMullen tomonidan isbotlangan g-teorema f-vektorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini to'liq tavsiflaydi. Samarqand davlat universiteti matematik olimlari bu yo'nalishda muhim tadqiqot ishlari olib borgan [1].

ZAMONAVIY GEOMETRIYADAGI QO'LLANILISHI

1. Differentsial geometriya va diskrekt minimal sirtlar. Ko'pyoqlilar silliq sirtlarning diskret analogi sifatida differentsial geometriyada keng qo'llaniladi. Diskrekt differentsial geometriya sohasida ko'pburchakli sirtlar orqali Gauss egriligi, diskret Laplasian va diskret minimal sirtlar o'rganiladi. Bu yondashuv Bobenko va Suris tomonidan tizimli rivojlantirilgan bo'lib [10], O'zbekiston Fanlar Akademiyasining tegishli bo'limlari ham ushbu sohadagi hamkorlik dasturlarida ishtirok etmoqda.

2. Kompyuter grafikasi va 3D modellash. Har qanday zamonaviy uch o'lchamli kompyuter modeli uchburchakli yoki to'rtburchakli poliedrik setka (mesh) sifatida ifodalanadi. Polygon mesh texnologiyasi video o'yinlar, animatsion filmlar, muhandislik CAD tizimlaridagi modellashtirish hamda tibbiy tomografiya tasviri rekonstruksiyasining asosini tashkil qiladi. Toshkent axborot texnologiyalari universiteti mutaxassislari bu texnologiyaning mahalliy dasturiy ta'minotga integratsiyasini tadqiq qilgan .

3. Arxitektura va qurilish muhandisligi. Baxminster Fuller tomonidan ixtiro qilingan geodezik kupol ikosaed yuzlariga asoslanib, eng yaxshi mustahkamlik/og'irlik nisbatiga ega inshoot sifatida tan olingan. O'zbekiston Milliy axborot-kutubxona markazi binosi, shuningdek, Navoiy ko'chasi bo'yidagi bir qator zamonaviy inshootlar ham geometrik poliedr tamoyillariga asoslanib loyihalangan. Samarqanddagi akademik tadqiqotlar bu uslubning qurilish amaliyotida qo'llanilishini tahlil qilgan .

4. Kristallografiya va kimyo. Tabiiy kristallar — osh tuzi (NaCl), olmoz va boshqalar — oktaed, tetraed yoki kubik simmetrik tuzilmalarda namoyon bo'ladi. 1985-yilda kashf etilgan C60 fullerening molekulyar tuzilishi to'liq kesmali ikosaedga mos keladi. O'zbekistonda Toshkent kimyo-texnologiya instituti olimlari nanomateriallar tarkibidagi poliedrik klasterlar tuzilishini rentgen-difraktsiya usulida o'rganib, bir qator yangi amaliy natijalar olgan.

5. Bioinformatika va virusologiya. Ko'plab viruslar kapside tuzilishi ikosaedrik simmetriyaga ega: adenovirus, herpesvirus va boshqalar. Bu qonuniyat Kaspersen va Klag tomonidan aniqlanib, vaksinalar yaratishda va antiviral preparatlar dizaynida faol qo'llanilmoqda . O'zbekistonda pandemiya davrida biologik himoya vositalarini loyihalashda ham ko'pyoqlilar geometriyasidan foydalanilgan.

6. Kombinatorik optimizatsiya va chiziqli dasturlash. Chiziqli dasturlashda (linear programming) maqsad funksiyasining maqbul sohasi ko'pincha konveks poliedr shaklida bo'ladi va optimal nuqta uning biror uchida joylashadi. Simpleks usuli shu uchlar bo'ylab harakatlanish orqali ishlaydi. O'zbekiston Milliy Universiteti Operatsion tadqiqotlar kafedrasida ushbu yo'nalishda ishlab chiqarish rejalashtirish va logistikaga tatbiq etilgan bir nechta yangi algoritmlarni ishlab chiqqan.

So'nggi yillarda O'zbekiston matematiklari ko'pyoqlilar nazariyasida bir qator original natijalar qo'lga kiritdi. Jumladan, O'zbekiston Fanlar Akademiyasi Matematika institutida olib borilgan ishlar [1] qavariq ko'pyoqlilarning ekstremal masalalariga bag'ishlangan: massaning minimal yoki maksimal tarqalish konfiguratsiyalarini aniqlash masalasida yangi cheklovlar olindi. Toshkent davlat texnika universiteti tadqiqotchilari [2] muhandislik inshootlarida qo'llaniladigan yupqa qobiqli poliedrik tuzilmalarning chidamlilik tahlilini chekli elementlar usuli va poliedr nazariyasi sintezi asosida yangi darajaga olib chiqdi. Ushbu natijalar Markaziy Osiyo mintaqasidagi zilzilabardosh bino loyihalashda keng qo'llanilmoqda. Jahon miqyosida topologik ma'lumotlar tahlili (TDA — Topological Data Analysis) sohasida ko'pyoqlilar simplitsial komplekslar orqali katta hajmli ma'lumotlardagi yashirin tuzilmalarni aniqlashda qo'llanilmoqda. O'zbekistonda ham sun'iy intellekt va mashina o'rganish sohasidagi tadqiqotlarda ushbu geometrik yondashuv tobora ko'proq e'tiborga molik bo'lib bormoqda. Kvant hisoblashda Kitaevning torik kod modeli kubik ko'pyoqlilarga asoslangan bo'lib, topologik kvant xatolarni tuzatish protokollarining nazariy poydevorini tashkil qiladi. Bu yo'nalish jahon miqyosida eng intensiv rivojlanayotgan sohalardan biridir va O'zbekistonning kvant texnologiyalari strategiyasida ham o'z o'rnini egallashi kutilmoqda.

Ko'pyoqlilar — qadimgi yunon geometriyasidan tortib zamonaviy kvant hisoblashgacha bo'lgan ulkan ilmiy yo'lni bosib o'tgan matematikaning nodir ob'ektlari. Maqolada ko'rib chiqilgan asosiy xulosalar quyidagilardan iborat:

(1) Platon va Arximed jismlari klassik tasnifning poydevori bo'lib, zamonaviy materiallar fanida ham amaliy ahamiyatini saqlab qolmoqda.

(2) Eyler xarakteristikasi $V - E + F = 2$ topologiyaning universal vositasiga aylangan; uning umumlashtirilishi ko'p o'lchamli manifoldlarga ham tatbiq etiladi.

(3) Koshi, Steinitz va Dehn tomonidan isbotlangan fundamental teoremlar poliedr nazariyasining mustahkam ilmiy asosini tashkil qiladi.

(4) Ko'pyoqlilar kompyuter grafikasi, arxitektura, kristallografiya, virusologiya va chiziqli optimallashtirishdagi qo'llanilishlari bilan zamonaviy texnologiyalarning ajralmas qismiga aylangan.

(5) O'zbek matematiklari bu sohada muhim original tadqiqotlar olib borib, xalqaro ilmiy hamjamiyatda o'z hissasini qo'shmoqda.

Keyingi tadqiqotlar uchun istiqbolli yo'nalishlar: yuqori o'lchamli politoplarning kombinatorik xossalari o'rganish; ko'pyoqli asosidagi yangi mashina o'rganish modellarini ishlab chiqish; shuningdek, kvant hisoblash va topologik ma'lumotlar tahlilida poliedrik tuzilmalarning yanada chuqurroq tatbiqini amalga oshirish.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Azamov A. A., Tilavov A. M. Ko'pyoqlilar va ularning ekstremal xossalari // O'zbekiston Matematika Jurnal. — 2019. — №3. — B. 15–28.
2. Mirzaahmedov M. A., Xoliqov T. H. Geometriya va topologiya asoslari. — Toshkent: O'zbekiston Milliy Ensiklopediyasi, 2017. — 312 b.
3. Rashidov A. R. Algebraik topologiyaga kirish. — Toshkent: Fan nashriyoti, 2015. — 248 b.
4. Yusupov H. N. Muntazam ko'pyoqlilar va ularning simmetrik guruhlar. // Samarqand davlat universiteti Ilmiy xabarlar. — 2020. — №4. — B. 72–84.
5. Toshmatov Z. R. Eyler formulasining umulashtirilishi va zamonaviy tatbiqlari // O'zMU Xabarlar. — Matematika seriyasi. — 2022. — №1. — B. 33–41.
6. Qodirov B. A. Kombinatorik geometriya: darslik. — Toshkent: TDTU nashriyoti, 2018. — 196 b.
7. Xasanov M. X., Ro'ziboyev L. A. Dehn invarianti va ko'pyoqlilar parchalanishi masalalari // O'zbekiston Matematika Jurnal. — 2023. — №1. — B. 55–67.
8. Bobenko A. I., Suris Yu. B. Diskretn differentsial geometriya: integratsiyalashgan tuzilma. — Moskva: MTsNMO, 2010. — 456 b.
9. Muxtorov J. A., Abdullayeva N. K. Chiziqli dasturlash va konveks poliedrlar: ishlab chiqarishdagi tatbiqlari // O'zMU Xabarlar. Matematika seriyasi. — 2020. — №2. — B. 60–70.
10. Nazarov F. R. Topologik ma'lumotlar tahlili va simplitsial komplekslar // Raqamli texnologiyalar va matematika. — Toshkent: TDYU nashriyoti, 2023. — B. 101–115.