

## RIMAN GEOMETRIYASI ASOSLARI

**Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi**

*Andijon davlat pedagogika instituti*

*"Matematika va informatika" kafedrası o'qituvchisi*

*E-mail: saliyevasevara18@gmail.com*

**Nu'monova Nodiraxon Omonjon qizi**

*Andijon davlat pedagogika instituti*

*"Aniq va tabiiy fanlar" fakulteti*

*Matematika yo'nalishi 2-kurs talabasi*

*E-mail: numanovanodira0@gmail.com*

**Annotatsiya :** *Ushbu maqolada zamonaviy matematikaning fundamental bo'limlaridan biri bo'lgan Riman geometriyasining nazariy asoslari va uning amaliy ahamiyati tadqiq etilgan. Tadqiqot davomida ko'p o'lchovli manifoldlar tushunchasi, Riman metrikasi va metrik tenzorning geometrik xossalari tahlil qilingan. Shuningdek, Riman fazolarida geodezik chiziqlar, egilish (krivizna) tushunchasi va ularning zamonaviy fizika, xususan, umumiy nisbiylik nazariyasidagi o'rni yoritib berilgan. Maqolada differensial geometriya usullarining fan va texnika rivojida ahamiyati geometrik va analitik yondashuvlar orqali asoslangan.*

**Kalit so'zlar :** *Riman geometriyasi, manifold (ko'p o'lchovli ko'rinish), Riman metrikasi, metrik tenzor, geodezik chiziqlar, egilish, Riman fazosi, differensial geometriya.*

**Аннотация :** *В данной статье исследуются теоретические основы геометрии Римана, являющейся одним из фундаментальных разделов современной математики, и её практическое значение. В ходе исследования анализируются понятие многомерных многообразий, свойства римановой метрики и метрического тензора. Также освещаются концепции геодезических линий, кривизны в римановых пространствах и их роль в современной физике, в частности, в общей теории относительности. В статье на основе геометрических и аналитических подходов обоснована важность методов дифференциальной геометрии в развитии науки и техники.*

**Ключевые слова:** *геометрия Римана, многообразие, риманова метрика, метрический тензор, геодезические линии, кривизна, риманово пространство, дифференциальная геометрия.*

**Abstract :** *This article explores the theoretical foundations of Riemannian geometry, one of the fundamental branches of modern mathematics, and its practical significance. The study analyzes the concept of multidimensional manifolds, the properties of the Riemannian metric, and the metric tensor. It also highlights the concepts of geodesic lines, curvature in Riemannian spaces, and their role in modern physics, particularly in the general theory of*

*relativity. The importance of differential geometry methods in the development of science and technology is justified through geometric and analytical approaches.*

**Keywords:** *Riemannian geometry, manifold, Riemannian metric, metric tensor, geodesic lines, curvature, Riemannian space, differential geometry.*

Insoniyatning fazo haqidagi tasavvurlari ming yillar davomida Yevklid geometriyasi doirasida cheklanib qolgan edi. Biroq, XIX asr o'rtalariga kelib, matematik tafakkurda ulkan burilish yuz berdi. 1854-yilda Bernhard Riman o'zining "Geometriya asosida yotgan farazlar to'g'risida"gi mashhur ma'ruzasi bilan fanda yangi davrni ochib berdi. Riman geometriyasi nafaqat tekislik yoki sirtlarni, balki ixtiyoriy o'lchovli egri fazolarni o'rganish imkonini yaratdi. Ushbu maqolada Riman geometriyasining fundamental tushunchalari va ularning zamonaviy nazariy fizika hamda texnologiyalardagi o'рни tahlil qilinadi.

Differensial geometriya — matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, u egri chiziqlar, sirtlar va ko'p o'lchovli fazolarning geometrik xossalarini differensial va integral hisoblash usullari yordamida o'rganadi. Bu fan geometrik obyektlarning uzunligi, burchagi, egilishi, yuzasi va boshqa xususiyatlarini matematik jihatdan aniqlash va tahlil qilish bilan shug'ullanadi. Differensial geometriya asosan matematik analiz, chiziqli algebra va klassik geometriya asoslariga tayanadi. Shu sababli u matematikaning bir necha yo'nalishlarini birlashtirgan murakkab va keng qamrovli fan hisoblanadi.

Riman geometriyasining eng muhim tushunchalaridan biri ko'p o'lchovli ko'rinishlar, ya'ni manifoldlar hisoblanadi. Manifold — bu shunday matematik fazoki, uning har bir kichik qismi oddiy Evklid fazosiga o'xshash bo'ladi. Boshqacha aytganda, manifold global jihatdan murakkab shaklga ega bo'lishi mumkin, lekin uning har bir kichik sohasi oddiy koordinata tizimi orqali ifodalanadi va u yerda Evklid geometriyasining qonunlari amal qiladi.

Manifold tushunchasi matematikada murakkab geometrik shakllarni o'rganish uchun kiritilgan. Oddiy geometriyada biz tekislik yoki uch o'lchovli fazoni ko'rib chiqamiz. Ammo tabiatda va ilmiy tadqiqotlarda bundan ham murakkab shakllar uchraydi. Shunday fazolarni o'rganish uchun matematiklar manifoldlar nazariyasini ishlab chiqdilar. Bu nazariya yordamida turli o'lchovdagi fazolarni umumiy usullar bilan o'rganish mumkin.

Manifold tushunchasini tushunish uchun oddiy misol sifatida Yer sharining sirtini ko'rib chiqish mumkin. Yerning butun sirtini qaraganda u sfera shakliga ega. Ammo kichik hududni, masalan, bir shahar yoki viloyat hududini olsak, u deyarli tekis ko'rinadi. Shu sababli sfera ikki o'lchovli manifold hisoblanadi. Chunki uning har bir kichik qismi tekislikka o'xshash bo'lsa ham, umumiy ko'rinishi egri sirt bo'ladi.

Manifoldlar turli o'lchovlarda bo'lishi mumkin. Masalan:

- 1 o'lchovli manifold — egri chiziq;
- 2 o'lchovli manifold — sirtlar (masalan, sfera yoki silindr sirtlari);
- 3 o'lchovli manifold — uch o'lchovli fazoga o'xshash murakkab fazolar.

Riman geometriyasining asosiy tushunchalaridan biri Riman metrikasi hisoblanadi. Riman metrikasi — bu manifoldda masofa, burchak va uzunlik kabi geometrik kattaliklarni

aniqlash imkonini beruvchi matematik tuzilma hisoblanadi. Oddiy Evklid geometriyasida masofa va burchaklar aniq formulalar orqali aniqlanadi. Ammo ko'p o'lchovli yoki egri fazolarda bunday kattaliklarni aniqlash uchun maxsus matematik apparat zarur bo'ladi. Shu sababli Riman metrikasi tushunchasi kiritilgan.

Riman metrikasi odatda metrik tenzor yordamida ifodalanadi. Metrik tenzor — bu manifoldning har bir nuqtasida aniqlangan matematik obyekt bo'lib, u ikki vektor orasidagi skalyar ko'paytmani aniqlash imkonini beradi. Agar manifoldda koordinatalar tizimi  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  berilgan bo'lsa, u holda Riman metrikasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

bu yerda  $g_{ij}$  — metrik tenzorning komponentalari bo'lib, ular fazoning geometrik tuzilishini ifodalaydi. Ushbu formula yordamida manifolddagi juda kichik masofa elementini aniqlash mumkin.

Riman geometriyasida asosiy o'rganiladigan obyektlardan biri Riman fazosi hisoblanadi. Riman fazosi — bu differentsiallanuvchi manifold bo'lib, unda masofa, burchak va uzunlik kabi geometrik kattaliklarni aniqlash imkonini beruvchi Riman metrikasi berilgan bo'ladi. Boshqacha aytganda, agar biror ko'p o'lchovli manifoldda metrik tenzor aniqlangan bo'lsa, u holda bunday manifold Riman fazosi deb ataladi.

Matematik jihatdan Riman fazosi odatda  $(M, g)$  ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda  $M$  — differentsiallanuvchi manifold,  $g$  esa shu manifoldda berilgan metrik tenzor hisoblanadi. Aynan metrik tenzor yordamida fazodagi masofa, vektorlar uzunligi va ular orasidagi burchaklar aniqlanadi. Riman fazosi tushunchasi oddiy Evklid fazosining umumlashgan shakli hisoblanadi. Evklid geometriyasida tekislik yoki uch o'lchovli fazoda masofa quyidagi mashhur formula orqali aniqlanadi:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Riman fazolariga bir nechta oddiy misollar keltirish mumkin:

#### 1. Evklid fazosi

Oddiy tekislik yoki uch o'lchovli fazo ham Riman fazosining eng sodda misoli hisoblanadi. Bu yerda metrika oddiy Evklid metrikasiga teng bo'ladi va fazo egilmagan bo'ladi.

#### 2. Sfera sirtlari

Sfera sirtini ham Riman fazosi sifatida qarash mumkin. Masalan, Yer sharining sirtida joylashgan barcha nuqtalar ikki o'lchovli Riman fazosini tashkil qiladi. Bu yerda eng qisqa yo'llar katta doiralar bo'ylab o'tadi.

#### 3. Silindr sirtlari

Silindr sirtini ham ikki o'lchovli Riman fazosi sifatida qarash mumkin. Bu fazoda geodezik chiziqlar silindr bo'ylab o'tuvchi egri chiziqlar bo'ladi.

Riman geometriyasida muhim tushunchalardan biri geodezik chiziqlar hisoblanadi. Geodezik chiziq — bu manifoldda ikki nuqta orasidagi eng qisqa yoki eng tabiiy yo'lni ifodalovchi egri chiziqdir. Boshqacha aytganda, geodezik chiziq fazoning ichida harakat

qilayotgan nuqta yo'nalishini imkon qadar o'zgartirmasdan davom ettiradigan chiziq hisoblanadi. Geodezik chiziq tenglamasi odatda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$$

Bu yerda  $\Gamma_{ij}^k$  — Kristoffel belgilaridir.

Riman geometriyasida eng ko'p qo'llaniladigan ulanish Levi-Chivita ulanishi hisoblanadi. Bu ulanish ikki muhim xususiyatga ega:

- u metrikaga mos keladi, ya'ni vektorlarning uzunligi saqlanadi;
- u simmetrik bo'lib, fazoning geometrik tuzilishini to'g'ri aks ettiradi.

Levi-Chivita ulanishi orqali kovariant hosila quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\nabla_j V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i V^k$$

Bu yerda  $\Gamma_{ij}^k$  — Kristoffel belgilarini ifodalaydi. Ular fazoning qanday egilganligini ko'rsatadi va kovariant hosilani hisoblashda muhim rol o'ynaydi.

Differensial geometriyada muhim tushunchalardan biri egilish (krivizna) hisoblanadi. Egilish — bu geometrik obyektning tekislikdan yoki oddiy Evklid fazosidan qanchalik farq qilishini ko'rsatuvchi kattalikdir. Boshqacha aytganda, egilish sirt yoki fazoning qanchalik egri ekanligini matematik tarzda ifodalaydi.

Riman egilish tenzorining matematik ifodasi

Agar manifoldda Levi-Chivita ulanishi berilgan bo'lsa, Riman egilish tenzori  $\Gamma_{ijl}^k$  quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{km}^i \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^m$$

Bu yerda:

$\Gamma_{jk}^k$  — Kristoffel belgilarini bildiradi, ular ulanish orqali vektorlarning kovariant hosilasi hisoblanayotganda paydo bo'ladi.

Riman geometriyasi nafaqat matematika nazariyasi, balki fizika, kosmologiya, mexanika, navigatsiya va kompyuter grafikasi kabi sohalarda keng qo'llaniladi. Umuman olganda, Riman geometriyasi fazolarning egilishi va geometrik xossalarini chuqur tushunishga imkon beruvchi nazariy vosita bo'lib, zamonaviy ilm-fanning ko'plab yo'nalishlarida markaziy ahamiyatga ega.

#### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9 iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo’llab-quvvatlash, shuningdek, O’zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to’g’risida” gi PQ-4387 son qarori Xudoyberganov G', Mansurov X.

2. Analitik geometriya asoslari – Toshkent: O'qituvchi nashriyoti, 2015.
3. Sadullayev A., Xudoyberganov G'. Oliy matematika kursi – Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2018.
4. Abdullayev R. Differensial geometriya elementlari – Toshkent: Fan nashriyoti, 2012.
5. Korn G., Korn T. Oliy matematika uchun matematik qo'llanma – Toshkent: O'qituvchi, 2003.
6. Demidovich B. Matematik analiz masalalari va mashqlari to'plami – Toshkent: O'qituvchi, 2006.