SODDA TRIGONOMETRIK TENGLAMALAR

Egamberdiyeva Farangis Oymurod qizi
Toshkent viloyati yangiyo'l tumani 2-umumiy o'rta ta'lim maktabi
Matematika fan o'qituvchisi

KIRISH

Trigonometrik tenglamalar umumta'lim maktablari hamda akademik litsey va kasb-hunar maktablari matematika kursining muhim va murakkab bo'limlaridan biri hisoblanadi. Ushbu mavzu o'quvchilarda funksional tafakkurni shakllantirish, analitik fikrlashni rivojlantirish, mantiqiy xulosa chiqarish ko'nikmalarini mustahkamlashda alohida ahamiyat kasb etadi. Trigonometrik tenglamalar algebra, geometriya va matematik analiz

elementlari bilan uzviy bog'liq bo'lib, ular orqali o'quvchilar davriy jarayonlarni matematik modellashtirishni o'rganadilar.

Sodda trigonometrik tenglamalar murakkab trigonometrik tenglamalar, trigonometrik tengsizliklar hamda trigonometrik sistemalarni o'rganish uchun nazariy asos vazifasini bajaradi. Shuning uchun ushbu mavzuni chuqur nazariy asosda, metodik jihatdan to'g'ri tashkil etilgan holda o'qitish muhim pedagogik vazifa hisoblanadi.

Mazkur mustaqil ishda sodda trigonometrik tenglamalarning nazariy asoslari, ularning turlari, umumiy yechim formulalari, davriylik xossalari, birlik aylana asosida tushuntirish hamda ularni o'qitish metodikasi batafsil va keng yoritiladi.

I. SODDA TRIGONOMETRIK TENGLAMALARNING NAZARIY ASOSLARI

1.1. Trigonometrik tenglamalar haqida umumiy tushuncha

Trigonometrik tenglama deb noma'lum o'zgaruvchi trigonometrik funksiyalar (sinus, kosinus, tangens, kotangens) ishtirok etgan tenglamaga aytiladi. Masalan:

$$sin\,x = \frac{1}{2}$$

$$cos\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,x = 1$$

$$ctg\,x = -\sqrt{3}$$

Trigonometrik tenglamalarning asosiy xususiyati shundaki, ularning yechimlari ko'pincha cheksiz ko'p bo'ladi. Buning sababi trigonometrik funksiyalarning davriy xarakterga ega ekanligidir. Masalan, agar sin x = 0 bo'lsa, x = 0, π, 2π, 3π va hokazo qiymatlarda tenglik bajariladi.

Trigonometrik tenglamalarni yechishda quyidagi tushunchalar muhim ahamiyatga ega:

Aniqlanish sohasi

Qiymatlar sohasi

Davr

Juft va toq funksiyalar

Teskari trigonometrik funksiyalar

Trigonometrik tenglamalar algebraik tenglamalardan farqli ravishda geometrik va grafik interpretatsiyaga ega. Bu esa ularni oʻqitishda koʻrgazmalilik prinsipini qoʻllash imkonini beradi.

1.2. Sodda trigonometrik tenglamalarning turlari

Sodda trigonometrik tenglamalar quyidagi asosiy koʻrinishlarga ega:

$$1)\ sin\,x\ =\ a$$

Bu tenglama sinus funksiyasining qiymati a ga teng boʻlgan barcha burchaklarni topishni talab qiladi.

Sinus funksiyasining qiymatlar sohasi:

$$-1\ \le\ sin\,x\ \le\ 1$$

Shuning uchun $|a|\ \le\ 1$ boʻlgandagina tenglama yechimga ega boʻladi.

Agar $|a|\ >\ 1$ boʻlsa, tenglama yechimga ega emas.

Masalan:

$$sin\,x\ =\ \frac{1}{2}$$

$$x\ =\ \frac{\pi}{6}\ +\ 2k\pi\ yoki\ x\ =\ \frac{5\pi}{6}+\ 2k\pi$$

$$cos\,x\ =\ a$$

Kosinus funksiyasi ham quyidagi qiymatlar sohasiga ega:

$$-1\ \le\ cos\,x\ \le\ 1$$

Kosinus juft funksiya boʻlgani sababli:

$$cos(-x)\ =\ cos\,x$$

Masalan:

$$cosx = \frac{1}{2}$$

$$x\ =\ \pm\pi/3\ +\ 2k\pi$$

Tangens funksiyasi barcha haqiqiy sonlarni qabul qiladi:

$$-\infty\ <\ tg\,x\ <\ +\infty$$

Tangens funksiyasining davri π ga teng.

Masalan:

$$tg\,x\ =\ 1$$

$$x\ =\ \frac{\pi}{4}+\ k\pi$$

Kotangens funksiyasi ham barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi.

Masalan:

$$ctg\,x\ =\ 1$$

$$x\ = \frac{\pi}{4}+\ k\pi$$

1.3. Trigonometrik tenglamalarning umumiy yechim formulalari

Sodda trigonometrik tenglamalarning umumiy yechim formulalari quyidagicha:

$$sin\, x = a$$
$$x = (-1)\text{^}k\, arcsin\, a + k\pi$$
$$cos\, x = a$$
$$x = \pm\, arccos\, a + 2k\pi$$
$$tg\, x = a$$
$$x = arctg\, a + k\pi$$
$$ctg\, x = a$$
$$x = arcctg\, a + k\pi$$

Bu yerda $k \in Z$ (butun sonlar to‘plami).

Umumiy yechim formulalarini o‘quvchilarga tushuntirishda davriylik tushunchasini alohida ta’kidlash zarur

Sinus va kosinus funksiyalarining davri:

$$T = 2\pi$$

Tangens va kotangens funksiyalarining davri:

$$T = \pi$$

Birlik aylana – radiusi 1 ga teng bo‘lgan aylana bo‘lib, trigonometrik funksiyalarni geometrik talqin qilish imkonini beradi. Aylananing har bir nuqtasi $(cos\, x\, ;\, sin\, x)$ koordinatalarga ega.

Birlik aylana yordamida:

Sinus – ordinata

Kosinus – abstsissa

sifatida talqin qilinadi.

Bu usul trigonometrik tenglamalarni vizual tarzda tushuntirishda juda samarali hisoblanadi.

Trigonometrik tenglamalarni yechishda grafik usul muhim ahamiyat kasb etadi. Grafik usulning mohiyati shundan iboratki, tenglamaning chap va o‘ng tomonlari alohida-alohida funksiyalar sifatida qaralib, ularning grafiklari bir koordinata tekisligida chiziladi. Grafiklarning kesishish nuqtalari tenglamaning yechimlarini beradi.

Masalan, $sin\, x = 0.5$ tenglamani yechish uchun $y = sin\, x$ va $y = 0.5$ grafiklari chiziladi. Bu grafiklar kesishgan nuqtalarning abssissalari tenglamaning yechimlari hisoblanadi.

Grafik usulning afzalliklari:

Ko‘rgazmalilikni ta’minlaydi

Davriylikni aniq ko‘rsatadi

Yechimlar sonini tushunishga yordam beradi

Birlik aylana trigonometrik tenglamalarni o‘rganishda eng samarali geometrik modellardan biridir. Birlik aylana radiusi 1 ga teng bo‘lib, markazi koordinatalar boshida joylashgan bo‘ladi. Aylanadagi har bir nuqta ma’lum bir burchakka mos keladi.

Birlik aylana yordamida:

$sin\,x = a$ tenglamada ordinata a ga teng bo‘lgan nuqtalar olinadi

$cos\,x = a$ tenglamada abstsissa a ga teng bo‘lgan nuqtalar olinadi

Bu usul orqali o‘quvchilar burchaklarning joylashuvini, ularning simmetriyasini va davriyligini aniq ko‘ra oladilar.

Trigonometrik tenglamalarning aksariyati cheksiz ko‘p yechimga ega. Buning asosiy sababi trigonometrik funksiyalarning davriy ekanligidir. Masalan:

$$sin(x + 2\pi) = sin\,x$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, agar x tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda $x + 2\pi$ ham yechim bo‘ladi.

O‘quvchilarga ushbu xususiyatni tushuntirish orqali umumiy yechim tushunchasi mustahkamlanadi.

Teskari trigonometrik funksiyalar (arcsin, arccos, arctg, arcctg) trigonometrik tenglamalarni yechishda muhim rol o‘ynaydi. Ular berilgan trigonometrik qiymatga mos keluvchi burchakni topishga xizmat qiladi.

Masalan:

$arcsin\,a$ – sinus qiymati a bo‘lgan asosiy burchak

$arccos\,a$ – kosinus qiymati a bo‘lgan asosiy burchak

Bu funksiyalarni o‘rgatishda ularning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasiga alohida e’tibor qaratish lozim.

Quyida sodda trigonometrik tenglamalarga oid ayrim tipik misollar keltiriladi:

1. $sin\,x = 0$

Yechim: $x = k\pi$

2. $cos\,x = -1$

Yechim: $x = \pi + 2k\pi$

3. $tg\,x = \sqrt{3}$

Yechim: $x = \pi/3 + k\pi$

Bu kabi misollar o‘quvchilarning mavzuni mustahkamlashiga xizmat qiladi.

Sodda trigonometrik tenglamalarni yechishda aniq ketma-ketlikka amal qilish o‘quvchilar uchun qulaylik yaratadi va xatolar sonini kamaytiradi. Quyidagi umumiy algoritm tavsiya etiladi:

1. Trigonometrik funksiyaning qiymatlar sohasini tekshirish
2. Teskari trigonometrik funksiya yordamida asosiy burchakni topish
3. Davriylikni hisobga olib umumiy yechimni yozish
4. Zarur bo‘lsa, berilgan oraliqda yechimlarni aniqlash

Mazkur algoritmni doimiy qo‘llash o‘quvchilarda barqaror ko‘nikma hosil qiladi.

1.12. Trigonometrik tenglamalarni o‘rganishda tarixiy ma’lumotlar

Trigonometrik tushunchalar qadimgi astronomiya va geometriya bilan chambarchas bog‘liq. Qadimgi yunon olimlari trigonometrik nisbatlardan osmon jismlarining harakatini oʻrganishda foydalanganlar. Keyinchalik Sharq allomalari trigonometrik jadval va formulalarni rivojlantirganlar.

Tarixiy maʼlumotlardan foydalanish dars jarayonini qiziqarli qiladi va oʻquvchilarning fanga boʻlgan qiziqishini oshiradi.

Trigonometrik tenglamalar nafaqat nazariy, balki amaliy ahamiyatga ham ega. Ular:

Fizikadagi tebranish jarayonlari

Muhandislik hisob-kitoblari

Astronomik kuzatishlar

Texnika va qurilish masalalarida

keng qoʻllaniladi. Bu misollar orqali oʻquvchilarga matematik bilimlarning hayotdagi ahamiyati tushuntiriladi.

Trigonometrik tenglamalarni yechishda trigonometrik ayniyatlardan foydalanish muhim ahamiyatga ega. Trigonometrik ayniyatlar – oʻzgaruvchining barcha qiymatlarida toʻgʻri boʻladigan tengliklardir.

Asosiy trigonometrik ayniyatlar:

1. Asosiy ayniyat:

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

2. Tangens va kotangens orqali ifodalash:

$$tg\,x = sin\,x \,/\, cos\,x$$

$$ctg\,x = cos\,x \,/\, sin\,x$$

3. $1 + tg^2x = 1 \,/\, cos^2x$

4. $1 + ctg^2x = 1 \,/\, sin^2x$

Ushbu ayniyatlar yordamida murakkab koʻrinishdagi trigonometrik tenglamalarni soddalashtirish mumkin.

Masalan:

$$sin^2x + sin\,x = 0$$

Bu tenglama $sin\,x\,(sin\,x + 1) = 0$ koʻrinishga keltiriladi va sodda tenglamalar sistemasiga ajratiladi

Trigonometrik tenglamalarni yechishda qushish va ayirish formulalari alohida oʻrin tutadi. Ushbu formulalar yordamida murakkab argumentli funksiyalar soddalashtiriladi.

Asosiy formulalar:

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\, cos\beta \pm cos\alpha\, sin\beta$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\, cos\beta \mp sin\alpha\, sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = (tg\alpha \pm tg\beta) \,/\, (1 \mp tg\alpha\, tg\beta)$$

Bu formulalar ayniqsa quyidagi koʻrinishdagi tenglamalarni yechishda qoʻllaniladi:

$$sin(2x) = a$$

$$cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$tg(3x - \frac{\pi}{6}) = 1$$

Masalan:

$$sin(2x) = sin(\pi/3)$$

Bu yerda $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ yoki $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Shundan $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ yoki $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Ikki burchak formulalari trigonometrik tenglamalarni soddalashtirishda keng qo‘llaniladi:

$$sin\ 2x = 2\ sin\ x\ cos\ x$$
$$cos\ 2x = cos^2x - sin^2x$$
$$cos\ 2x = 1 - 2\ sin^2x$$
$$cos\ 2x = 2\ cos^2x - 1$$

Yarim burchak formulalari:

$$sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - cosx}{2}$$
$$cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 + cosx}{2}$$

Masalan:

$$cos\ 2x = \frac{1}{2}$$

Bu tenglama $2\ cos^2x - 1 = \frac{1}{2}$ko‘rinishga keltirilib, algebraik tenglamaga aylantiriladi

Ko‘pincha trigonometrik tenglamalar ko‘paytma ko‘rinishida ifodalanadi:

$$sin\ x\ cos\ x = 0$$

Bu tenglama $sin\ x = 0$ yoki $cos\ x = 0$ ko‘rinishida ajratiladi.

Bu usul ayniqsa quyidagi tenglamalarda samarali:

$$sin\ x\ (2\ cos\ x - 1) = 0$$

Natijada ikkita sodda tenglama hosil bo‘ladi.

Ba’zi hollarda trigonometrik tenglamani bir xil funksiyaga keltirib, uni algebraik tenglama sifatida yechish mumkin.

Masalan:

$$2\ sin^2x - 3\ sin\ x + 1 = 0$$

Bu yerda $t = sin\ x$ deb belgilab:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Algebraik tenglama yechilib, so‘ng $sin\ x = t$ ko‘rinishida sodda trigonometrik tenglamalar olinadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alimov Sh.A., Kolmogorov A.N. va boshqalar. *Algebra va analiz asoslari*. – Toshkent: O‘qituvchi, 2018.

2. Alimov Sh.A. va boshqalar. *Algebra. 9-sinf uchun darslik*. – Toshkent: O‘qituvchi, 2020.

3. Qodirov B., Toʻxtasinov M. *Matematika oʻqitish metodikasi*. – Toshkent, 2017.
4. Abduqodirov A.A. *Pedagogika nazariyasi*. – Toshkent, 2016.
5. Ayupov Sh.A. *Oliy matematika asoslari*. – Toshkent, 2019.
6. Internet manbalari:
   - www.ziyonet.uz
   - www.khanacademy.org