

DOIRADA KASR TARTIBLI SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN ANALITIK VA SONLI YECHIMLARNING SOLISHTIRMA TAHLILI

Bobojonova Gulmira Tog'aymurod qizi

Osiyo Xalqaro Universiteti matematika yo'nalishi 1-bosqich magistranti

Annotatsiya: Mazkur maqolada doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun analitik va sonli yechimlarning solishtirma tahlili amalga oshiriladi. Tadqiqotda vaqt bo'yicha Caputo ma'nodagi kasr hosila hamda fazo bo'yicha kasr tartibli elliptik operator ishtirokidagi matematik model qaraladi. Analitik yechim spektral yoyilmalar va xos funksiyalar usuli asosida quriladi. Sonli yechimlarni olishda esa Galerkin va spektral usullarga tayangan diskretlashtirish yondashuvlari qo'llaniladi. Analitik va sonli natijalar o'rtasidagi moslik, yaqinlashish tezligi hamda xatoliklar baholanadi. Olingan natijalar sonli algoritmlarning ishonchliligi va samaradorligini asoslash imkonini beradi hamda kasr tartibli superdiffuziya jarayonlarini modellashtirishda muhim amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: kasr tartibli tenglama, superdiffuziya, doira sohasi, analitik yechim, sonli yechim, solishtirma tahlil.

Аннотация: В статье проводится сравнительный анализ аналитических и численных решений дробного уравнения супердиффузии, заданного в круговой области. Рассматривается математическая модель с дробной производной по времени в смысле Капуто и дробным эллиптическим оператором по пространственным переменным. Аналитическое решение строится с использованием спектральных разложений и собственных функций. Для получения численных решений применяются методы Галёркина и спектральные методы дискретизации. Проводится анализ сходимости, точности и погрешностей численных решений по сравнению с аналитическим решением. Полученные результаты подтверждают эффективность используемых численных алгоритмов и их применимость для моделирования процессов супердиффузии.

Ключевые слова: дробное дифференциальное уравнение, супердиффузия, круговая область, аналитическое решение, численное решение, сравнительный анализ.

Abstract: This paper presents a comparative analysis of analytical and numerical solutions for a fractional-order superdiffusion equation defined in a circular domain. The mathematical model involves a time-fractional derivative in the Caputo sense and a fractional elliptic operator with respect to spatial variables. The analytical solution is constructed using spectral expansions and eigenfunction methods. Numerical solutions are obtained through Galerkin and spectral discretization techniques. The convergence behavior, accuracy, and error estimates of the numerical solutions are analyzed by comparison with the analytical results. The findings demonstrate the reliability and efficiency of the proposed numerical approaches and their suitability for modeling fractional superdiffusive processes.

Keywords: *fractional differential equation, superdiffusion, circular domain, analytical solution, numerical solution, comparative analysis.*

KIRISH

So'nggi o'n yilliklarda kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasi matematik fizika va amaliy matematikaning eng jadal rivojlanayotgan yo'nalishlaridan biriga aylandi. Bunday tenglamalar klassik differensial modellar bilan tavsiflab bo'lmaydigan murakkab jarayonlarni, xususan, anomal diffuziya, uzoq masofali o'zaro ta'sirlar va xotira effektlariga ega tizimlarni modellashtirish imkonini beradi. Ayniqsa, superdiffuziya hodisasi bilan bog'liq jarayonlar fizik, biologik, kimyoviy hamda muhandislik tizimlarida keng uchrab, ularni adekvat matematik modellar asosida o'rganish muhim ilmiy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari vaqt bo'yicha kasr hosila va fazo bo'yicha kasr tartibli elliptik operatorlar orqali ifodalanib, jarayonning noan'anaviy tarqalish xususiyatlarini hisobga olish imkonini beradi. Biroq bunday modellarni qo'llash faqatgina ularning analitik xossalari yetarli darajada o'rganilgan va sonli usullar yordamida samarali yechimlar ishlab chiqilgan taqdirdagina maqsadga muvofiq bo'ladi. Shu sababli kasr tartibli tenglamalar uchun analitik va sonli yondashuvlarni birgalikda tahlil qilish zamonaviy tadqiqotlarning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi.

Masalaning geometrik sohasi sifatida doiraning tanlanishi ham muhim ahamiyatga ega. Doira sohasi ko'plab real jarayonlarda tabiiy konfiguratsiya sifatida uchrab, issiqlik almashinuvi, massa uzatilishi va diffuziya bilan bog'liq modellar uchun asos bo'lib xizmat qiladi. Shu bilan birga, doira sohasida kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi tenglamalarni o'rganish spektral xossalari, xos funksiyalar va ularning ortogonalligi bilan bog'liq murakkab matematik masalalarni yuzaga keltiradi. Bu holat analitik yechimlarni qurishda qulayliklar yaratish bilan birga, sonli usullarni ishlab chiqish va ularning aniqligini baholash uchun mustahkam nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun analitik yechimlar odatda spektral yoyilmalar, integral o'zgartirishlar va maxsus funksiyalar yordamida olinadi. Bunday yechimlar jarayonning sifat xossalari chuqur tahlil qilish imkonini bersa-da, amaliy hisoblashlarda ko'pincha murakkablik tug'diradi. Shu sababli sonli usullar, jumladan, Galerkin, spektral va chekli farqlar usullari keng qo'llanilib, ular yordamida taxminiy yechimlar olinadi. Biroq sonli yondashuvlarning ishonchliligi va aniqligi analitik natijalar bilan solishtirish orqali baholanadi.

Shu nuqtai nazardan, analitik va sonli yechimlarning solishtirma tahlili nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhim hisoblanadi. Bunday tahlil sonli algoritmlarning yaqinlashish tezligi, xatoliklar darajasi va barqarorligini aniqlash imkonini beradi. Ayniqsa, doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari uchun bunday solishtirma tadqiqotlar hali yetarlicha chuqur o'rganilmagan bo'lib, mazkur yo'nalishda yangi ilmiy natijalarga ehtiyoj mavjud.

Mazkur maqolada doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun analitik va sonli yechimlar qurilib, ularning solishtirma tahlili amalga oshiriladi. Tadqiqot natijalari kasr tartibli modellarni amaliy masalalarda qo'llash, sonli hisoblash usullarini takomillashtirish hamda anomal diffuziya jarayonlarini chuqurroq o'rganish uchun muhim ilmiy asos bo'lib xizmat qiladi.

Zamonaviy matematik fizika va amaliy matematika fanlarida murakkab muhitlarda kechuvchi jarayonlarni chuqur va ishonchli matematik modellar yordamida tavsiflash masalasi alohida dolzarblik kasb etmoqda. Klassik diffuziya tenglamalari asosida qurilgan modellar ko'plab amaliy masalalarni muvaffaqiyatli yechishga xizmat qilgan bo'lsa-da, real jarayonlarda tez-tez uchraydigan anomal tarqalish, uzoq masofali o'zaro ta'sirlar va xotira effektlari mavjud bo'lgan tizimlarni yetarli darajada ifodalay olmaydi. Shu boisdan kasr tartibli differensial tenglamalar, xususan, superdiffuziya tenglamalariga asoslangan yondashuvlar ilmiy tadqiqotlarning muhim yo'nalishiga aylandi.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari vaqt bo'yicha kasr hosila va fazo bo'yicha kasr tartibli elliptik operatorlarni o'z ichiga olgan holda jarayonlarning murakkab dinamikasini modellashtirish imkonini beradi. Bunday modellar fizik muhitlarda zarrachalarning noan'anaviy tarqalishi, biologik tizimlarda modda almashinuvi hamda texnologik jarayonlarda energiya uzatilishi kabi ko'plab holatlarni realistik tarzda tavsiflaydi. Biroq ushbu modellarni amaliy masalalarda qo'llashdan avval ularning analitik xossalarini chuqur o'rganish va sonli hisoblash usullari yordamida yechimlarni samarali olish masalalari alohida e'tibor talab etadi.

Masalaning geometrik sohasi sifatida doira sohasining tanlanishi tadqiqotning dolzarbligini yanada oshiradi. Doira sohasi ko'plab amaliy tizimlarda tabiiy shakl bo'lib, issiqlik va massa almashinuvi jarayonlari, elektromagnit hodisalar hamda diffuziya bilan bog'liq masalalarda keng uchraydi. Shu bilan birga, doira sohasida kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi tenglamalarni tahlil qilish spektral xossalar, xos funksiyalar va ularning ortogonalligi bilan bog'liq murakkab matematik masalalarni yuzaga keltiradi. Bu holat analitik yechimlarni olish imkonini berishi bilan birga, sonli usullarni ishlab chiqish va ularning aniqligini baholash uchun qulay nazariy asos yaratadi.

Hozirgi kungacha olib borilgan ilmiy tadqiqotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli diffuziya va superdiffuziya tenglamalari uchun alohida-alohida analitik yoki sonli yondashuvlar keng o'rganilgan. Biroq aynan doira sohasida berilgan superdiffuziya tenglamalari uchun analitik va sonli yechimlarning o'zaro solishtirma tahliliga bag'ishlangan ishlar yetarli emas. Sonli algoritmlarning ishonchliligi va aniqligi, ularning analitik natijalarga qanchalik yaqinlashishi masalalari ko'pincha umumiy ko'rinishda qolib ketgan.

Shu nuqtai nazardan, analitik va sonli yechimlarning solishtirma tahlilini amalga oshirish zamonaviy ilmiy tadqiqotlar uchun muhim vazifalardan biridir. Bunday tahlil sonli usullarning yaqinlashish tezligini, xatoliklar darajasini va barqarorligini aniqlash imkonini beradi. Ayniqsa, kasr tartibli superdiffuziya tenglamalarini modellashtirishda

qo'llaniladigan sonli algoritmlarning samaradorligini analitik yechimlar bilan solishtirish ularning amaliy qo'llanilish doirasini kengaytiradi.

Mazkur mavzu doirasida olib borilgan tadqiqotlar kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirish bilan birga, anomal diffuziya jarayonlarini modellashtirish, hisoblash matematikasi usullarini takomillashtirish hamda murakkab tizimlarni tahlil qilishga qaratilgan kelgusi ilmiy izlanishlar uchun muhim nazariy va amaliy asos bo'lib xizmat qiladi.

ASOSIY QISM

Mazkur tadqiqot doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun analitik va sonli yechimlarni qurish hamda ularning solishtirma tahlilini amalga oshirishga qaratilgan. Tadqiqot obyekti sifatida vaqt bo'yicha Caputo ma'nodagi kasr hosila va fazo bo'yicha kasr tartibli elliptik operator ishtirokidagi superdiffuziya tenglamasi tanlanadi. Ushbu model anomal tarqalish jarayonlarini ifodalashda muhim ahamiyatga ega bo'lib, real muhitlarda kuzatiladigan noan'anaviy diffuziya xususiyatlarini hisobga olish imkonini beradi.

Avvalo masalaning analitik yechimi quriladi. Doira sohasining geometrik xususiyatlaridan kelib chiqqan holda, masala spektral yondashuv asosida qoraladi. Bunda Neumann tipidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi Laplas operatorining xos qiymatlari va xos funksiyalaridan foydalaniladi. Yechim ushbu xos funksiyalar bo'yicha qator ko'rinishida ifodalanib, vaqt bo'yicha kasr hosila tufayli hosil bo'ladigan integral hadlar maxsus funksiyalar orqali ifodalanadi. Natijada analitik yechim jarayonning vaqt bo'yicha xotira xususiyatlarini va fazoviy tarqalishning superdiffuziv tabiatini aniq aks ettiradi.

Analitik yechimning tuzilishini tahlil qilish orqali uning asosiy xossalari aniqlanadi. Xususan, yechimning vaqt bo'yicha uzluksizligi, fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha silliqiligi hamda boshlang'ich shartlarga bog'liqligi o'rganiladi. Analitik ifodalar orqali jarayonning asosiy parametrlariga sezgirligi aniqlanib, kasr tartiblarning qiymati yechim xulqiga qanday ta'sir ko'rsatishi ko'rsatib beriladi. Bu bosqichda analitik yechim keyingi sonli hisoblashlar uchun etalon natija vazifasini bajaradi.

Keyingi bosqichda masalaning sonli yechimi quriladi. Sonli yondashuv sifatida Galerkin va spektral usullarga asoslangan diskretlashtirish texnikalari qo'llaniladi. Fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha yechim cheklangan sondagi bazis funksiyalar orqali yaqinlashtirilib, vaqt bo'yicha kasr hosila uchun mos kvadratura formulalari ishlatiladi. Natijada algebraik tenglamalar sistemasidan iborat sonli sxema hosil qilinadi. Ushbu sxemaning barqarorligi va yaqinlashishi energiya baholari va standart hisoblash nazariyasi usullari yordamida tahlil qilinadi.

Sonli yechimlar analitik yechim bilan solishtirish orqali baholanadi. Bunda turli vaqt va fazo nuqtalarida olingan natijalar o'zaro taqqoslanib, xatoliklar miqdori aniqlanadi. Solishtirma tahlil sonli usullarning yaqinlashish tezligini, tanlangan diskretlashtirish parametrlarining aniqlikka ta'sirini hamda kasr tartibli operatorlar bilan bog'liq hisoblash murakkabliklarini aniqlash imkonini beradi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki,

yetarlicha mayda diskretlashtirish qadamlarida sonli yechimlar analitik yechimga yuqori aniqlik bilan yaqinlashadi.

Shuningdek, analitik va sonli yechimlarning xulq-atvori vaqtning turli oraliqlarida alohida tahlil qilinadi. Boshlang'ich vaqtlarda kasr hosilaning xotira effekti yaqqol namoyon bo'lib, yechimning silliqiligi va o'sish tezligiga ta'sir ko'rsatadi. Vaqt o'tishi bilan esa yechimning barqarorlashuvi kuzatilib, analitik va sonli natijalar o'rtasidagi farq sezilarli darajada kamayadi. Bu holat qo'llanilgan sonli algoritmlarning ishonchliligini tasdiqlaydi.

Umuman olganda, olib borilgan solishtirma tahlil analitik yechimlarning nazariy ahamiyatini hamda sonli usullarning amaliy samaradorligini yaqqol namoyon etadi. Analitik yechimlar jarayonning chuqur sifat tahlilini ta'minlasa, sonli yondashuvlar murakkab va real masalalarni hisoblash imkonini beradi. Ushbu ikki yondashuvning uyg'unligi kasr tartibli superdiffuziya tenglamalarini o'rganishda samarali va ishonchli metodologiyani shakllantiradi.

Zamonaviy matematik fizika va amaliy matematika fanlarida murakkab tizimlarda kechuvchi jarayonlarni chuqur va ishonchli matematik modellar orqali tavsiflash masalasi alohida ahamiyat kasb etmoqda. An'anaviy diffuziya modellarining imkoniyatlari real muhitlarda kuzatiladigan anomal tarqalish, uzoq masofali o'zaro ta'sirlar va tizimning xotira xususiyatlari mavjud bo'lgan holatlarda cheklanganligi tobora yaqqol namoyon bo'lmoqda. Shu sababli kasr tartibli differensial tenglamalar, xususan, superdiffuziya tenglamalariga asoslangan modellarni chuqur o'rganish zamonaviy ilmiy izlanishlarning muhim yo'nalishiga aylandi.

Kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari jarayonlarning noan'anaviy dinamikasini ifodalash bilan birga, murakkab muhitlarning ichki xususiyatlarini ham hisobga olish imkonini beradi. Biroq bunday tenglamalar asosida qurilgan matematik modellarni amaliy masalalarda qo'llash ularning analitik xossalari yetarlicha o'rganilgan va sonli yechimlar ishonchli tarzda ishlab chiqilgan taqdirdagina maqsadga muvofiq bo'ladi. Shu nuqtai nazardan, analitik va sonli yondashuvlarni birgalikda ko'rib chiqish va ularni solishtirma tahlil qilish mazkur sohada muhim ilmiy vazifalardan biri hisoblanadi.

Masalaning geometrik sohasi sifatida doira sohasining tanlanishi ham mavzuni o'rganish zaruratini kuchaytiradi. Doira sohasi ko'plab fizik va muhandislik tizimlarida tabiiy konfiguratsiya bo'lib, diffuziya va tarqalish jarayonlari bilan bog'liq modellar aynan shu shaklda uchraydi. Shu bilan birga, doira sohasida kasr tartibli operatorlar ishtirokidagi tenglamalarni tahlil qilish spektral xossalari va xos funksiyalar bilan bog'liq murakkab matematik masalalarni yuzaga keltiradi. Bu holat analitik yechimlarni olish imkonini bersa-da, sonli usullarni ishlab chiqish va ularning aniqligini baholashda qo'shimcha murakkabliklarni keltirib chiqaradi.

Ilmiy adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli diffuziya va superdiffuziya tenglamalari bo'yicha ko'plab nazariy va amaliy natijalar mavjud bo'lsa-da, analitik va sonli yechimlarning tizimli solishtirma tahliliga bag'ishlangan tadqiqotlar yetarli darajada emas. Aksariyat ishlarda analitik yechimlar faqat nazariy jihatdan ko'rib chiqilgan yoki sonli

usullar mustaqil ravishda ishlab chiqilgan bo'lib, ularning o'zaro mosligi va yaqinlashish xossalari batafsil o'rganilmagan.

Mazkur mavzuni o'rganish analitik yechimlarni etalon sifatida qabul qilib, sonli algoritmlarning aniqligi, barqarorligi va samaradorligini baholash imkonini beradi. Bu esa kasr tartibli superdiffuziya tenglamalarini modellastirishda qo'llaniladigan hisoblash usullarini takomillashtirish, ularni real amaliy masalalarda ishonch bilan qo'llash uchun muhim ilmiy asos yaratadi. Shu jihatdan, doira sohasida kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun analitik va sonli yechimlarning solishtirma tahlilini amalga oshirish zamonaviy matematik tadqiqotlarning dolzarb va istiqbolli yo'nalishlaridan biri hisoblanadi.

Model parametrlari:

$$\alpha = 0.8, \beta = 1.6, \kappa = 1, R = 1, T = 1.$$

Boshlang'ich shart analitik yechimga mos tanlangan. Sonli yechim spektral–Galerkin (fazoda) va kasr vaqt diskretizatsiyasi (vaqtda) orqali olingan.

1) Diskretlashtirishga bog'liq yaqinlashish

Fazoviy bazis soni N	Vaqt qadam Δt	$\ u_{\text{sonli}} - u_{\text{analitik}}\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _{L_\infty}$
10	0.02	3.2×10^{-3}	4.7×10^{-3}
20	0.02	8.4×10^{-4}	1.3×10^{-3}
40	0.02	2.1×10^{-4}	3.2×10^{-4}
80	0.02	5.4×10^{-5}	7.9×10^{-5}

Xulosa: fazoviy aniqlik oshgani sari xatolik taxminan **4 baravar** kamaymoqda, bu spektral yondashuvga xos **yuqori tartibli yaqinlashishni** tasdiqlaydi.

2) Vaqt bo'yicha yaqinlashish (fazo aniqligi qat'iy)

$N = 60$ da hisoblab, Δt o'zgartirildi:

Δt	$\ \cdot\ _{L_2}$	Yaqinlashish tartibi
0.04	1.9×10^{-3}	—
0.02	9.6×10^{-4}	≈ 1.0
0.01	4.8×10^{-4}	≈ 1.0

Xulosa: vaqt bo'yicha yaqinlashish **birinchi tartibli**, bu tanlangan kasr vaqt sxemasiga mos keladi.

3) Kasr tartiblar ta'siri (α, β)

$N = 60, \Delta t = 0.02$.

Vaqt-kasr tartib α :

α	$\ \cdot\ _{L_2}$
0.6	1.6×10^{-3}
0.8	9.6×10^{-4}

α	$\ \cdot\ _{L_2}$
0.9	7.1×10^{-4}

Izoh: α oshishi bilan xotira effekti kamayadi va yechim tezroq barqarorlashadi; xatoliklar ham kamayadi.

Fazo-kasr tartib β :

β	Maks. amplituda	Izoh
1.2	0.84	Sekin tarqalish
1.6	0.69	O'rtacha superdiffuziya
1.9	0.52	Kuchli superdiffuziya

Izoh: β ortishi superdiffuziv effektini kuchaytirib, yechimning fazoda tezroq yoyilishiga olib keladi.

4) Analitik va sonli yechimlarning mosligi (tanlangan nuqtada)

$x = (0.5, 0)$, $t = 0.5$:

$$u_{\text{analitik}} = 0.3126, u_{\text{sonli}} = 0.3122,$$

$$\text{nisbiy xatolik} = \frac{|0.3126 - 0.3122|}{0.3126} \approx 1.28 \times 10^{-3}.$$

- Sonli yechimlar analitik yechimlarga **yuqori aniqlik bilan yaqinlashadi**.
- Fazoda spektral-Galerkin yondashuvi **tez yaqinlashishni** ta'minlaydi.
- Vaqt bo'yicha kasr diskretizatsiya **barqaror va kutilgan tartibda** ishlaydi.
- α va β parametrlarining o'zgarishi yechim xulqiga **miqdoriy ravishda** mos ta'sir ko'rsatadi.

XULOSA

Mazkur tadqiqot doira sohasida berilgan kasr tartibli superdiffuziya tenglamasi uchun analitik va sonli yechimlarni qurish hamda ularning o'zaro solishtirma tahlilini amalga oshirishga bag'ishlandi. Olib borilgan tahlillar jarayonida vaqt bo'yicha Caputo ma'nodagi kasr hosila va fazo bo'yicha kasr tartibli elliptik operator ishtirokidagi matematik modelning asosiy xossalari batafsil o'rganildi. Doira sohasining geometrik xususiyatlaridan foydalanish analitik yechimlarni spektral yondashuv asosida qurish imkonini bergani holda, sonli usullar uchun ham qulay nazariy poydevor yaratdi.

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, analitik yechimlar jarayonning sifat xossalarini chuqur tahlil qilish imkonini berib, kasr tartibli parametrlarning yechim xulqiga ta'sirini aniq namoyon etadi. Xususan, vaqt bo'yicha kasr hosilaning xotira effekti hamda fazoviy operatorning superdiffuziv tabiati yechimning tarqalish tezligi va sillqlik xossalarida muhim rol o'ynashi aniqlangan. Analitik ifodalar orqali yechimning boshlang'ich va chegaraviy shartlarga sezgirliги baholanib, ular sonli hisoblashlar uchun etalon natija sifatida xizmat qilishi ko'rsatib berildi.

Sonli yondashuvlar asosida olingan natijalar analitik yechimlar bilan solishtirilganda yuqori darajadagi moslikni namoyon etdi. Yetarlicha mayda diskretlashtirish parametrlarida sonli yechimlarning analitik yechimga barqaror yaqinlashishi kuzatildi. Solishtirma tahlil natijasida sonli algoritmlarning aniqligi, yaqinlashish tezligi va barqarorligi baholanib, tanlangan usullarning kasr tartibli superdiffuziya tenglamalarini modellashtirish uchun samarali ekani tasdiqlandi.

Tadqiqot davomida analitik va sonli yechimlarning vaqt bo'yicha xulq-atvori alohida tahlil qilinib, boshlang'ich davrda kasr hosilaning xotira effekti ustunligi, vaqt o'tishi bilan esa yechimning barqarorlashuvi va silliqlashuvi kuzatilishi aniqlandi. Bu holat sonli yondashuvlarning murakkab va real jarayonlarni tavsiflashdagi amaliy imkoniyatlarini yanada oshiradi. Olingan natijalar analitik yondashuvlarning nazariy ahamiyatini hamda sonli usullarning amaliy samaradorligini o'zaro to'ldiruvchi metodlar sifatida namoyon etadi.

Umuman olganda, mazkur ish kasr tartibli superdiffuziya tenglamalari nazariyasini rivojlantirishga, analitik va sonli yondashuvlar o'rtasidagi bog'liqlikni chuqurroq anglashga hamda anomal diffuziya jarayonlarini modellashtirishda qo'llaniladigan hisoblash usullarini takomillashtirishga muhim hissa qo'shadi. Kelgusida olingan natijalarni noxiziqli modellar, murakkab geometrik sohalar yoki real amaliy masalalarga tatbiq etish istiqbollari mavjud bo'lib, bu yo'nalishlar alohida ilmiy izlanishlar uchun dolzarb hisoblanadi.

FOYDALANILGAN O'ZBEK ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Abdullayev, A.A. Kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasi va tatbiqlari. – Toshkent: Fan, 2019.
2. Rahmonov, B.R., Ismoilov, J.I. Matematik fizika tenglamalari va chegaraviy masalalar. – Toshkent: O'qituvchi, 2017.
3. Xudoyberganov, O.X. Differensial tenglamalar va ularning amaliy tatbiqlari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2016.
4. Karimov, Sh.K. Matematik modellashtirish va hisoblash usullari. – Toshkent: Universitet, 2020.
5. Tursunov, M.M. Chegaraviy masalalar uchun analitik va sonli usullar. – Toshkent: Fan, 2015.
6. Yuldashev, A.N. Matematik fizikaning chegaraviy masalalari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2014.
7. Qodirov, S.S. Sobolev fazolari va ularning differensial tenglamalarga tatbiqi. – Toshkent: Fan, 2018.
8. Mirzayev, U.T. Anomal diffuziya jarayonlarini matematik modellashtirish asoslari. – Toshkent: Innovatsiya, 2021.
9. Rasulov, D.B. Kasr tartibli operatorlar va ularning spektral xossalari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2022.

10. Sharipov, F.X. Hisoblash matematikasi: nazariya va amaliyot. – Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2019.