

## FUNKSIYALARNI BESSEL FUNKSIYALARI YORDAMIDA QATORGA YOYISH

**Umarov Nurali Olimjonovich**

*Fargʻona “Temurbeklar maktabi” harbiy-akademik litseyi  
matematika fani oʻqituvchisi*

Ushbu ishda 2-tartibli oddiy differensial tenglama uchun Dirixlening spektral masalasini koʻramiz. (\*) xos qiymatlar, xos funksiyalarni topamiz va shu funksiya yordamida baʼzi funksiyalarni qatorga yoyamiz.

$D_\lambda$  **masala.**  $\lambda$  parametrning shunday qiymatlarini topish kerakki,

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \lambda r R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad (1)$$

tenglamaning quyidagi

$$R(0) = O(1), \quad R(a) = 0, \quad (2)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi trivial boʻlmagan yechimi mavjud boʻlsin.

Bu yerda katta  $O(1)$  belgisi [1, c15] funksiyani qandaydir oʻzgarmas son kichikligini bildiradi.

Qidirilayotgan  $\lambda$  parametrning qiymatlari (1), (2) masalaning xos qiymatlari, ularga mos keluvchi trivial boʻlmagan yechimlar esa xos funksiyalar deyiladi.

(1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun,  $x = \sqrt{\lambda}r$   $\lambda > 0$  almashtirish bajaramiz. Natijada Bessel tenglamasi deb ataluvchi:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + R = 0 \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz.

(3) tenglamaning umumiy yechimi koʻrinishidan [2] foydalanib, (1) tenglamaning umumiy yechimini quyidagi koʻrinishda hosil qilamiz:

$$R(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad (4)$$

bu yerda  $J_0(x)$  va  $Y_0(x)$  – mos holda 0-tartibli birinchi va ikkinchi tur Bessel funksiyalari. A va B- ixtiyoriy oʻzgarmas sonlar.

Bu (4) tenglamaning umumiy yechimini (2) shartning birinchisiga boʻy sindiramiz.

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_0(\sqrt{\lambda r}) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} Y_0(\sqrt{\lambda r}) = -\infty,$$

tenglikni inobatga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$R(0) = A \lim_{r \rightarrow 0} J_0(\sqrt{\lambda r}) + B \lim_{r \rightarrow 0} Y_0(\sqrt{\lambda r}) = A \cdot 1 + B \cdot (-\infty)$$

(2) shartning birinchisiga asosan  $A \neq 0, B = 0$  deb hisoblaymiz. Natijada bizda (1) tenglamaning (2) shartning birinchisini qanoatlantiruvchi yechimni hosil qilamiz:

$$R(r) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda r}). \quad (5)$$

(5)  $\Rightarrow$  (2) shartni ikkinchisiga bo'y sindiramiz. Ya'ni

$$R(a) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda a}) = 0$$

$A \neq 0$  ligidan tenglamaning ikki tomonini  $A$  ga bo'lamiz. Natijada  $\lambda$  parametriga nisbatan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$J_0(\sqrt{\lambda a}) = 0 \quad (6)$$

Bilamizki,  $l > -1$  qiymatlarida  $J_l(z)$  Bessel funksiyasi sanoqli "0" qiymatlarni qabul qiladi va bular haqiqiy bir-biriga qarama-qarshi ishorali ildizlarga ega [2, c528]. (4) tenglamada  $\sqrt{\lambda a} = \gamma$  belgilashni qabul qilib, quyidagi ko'rinishga kelamiz:

$$J_0(\gamma) = 0 \quad (7)$$

$\lambda > 0$  ligidan,  $\gamma$  – haqiqiy; bu (7) tenglamaning haqiqiy ildizlarini  $J_0(\gamma)$  funksiyasining grafik ko'rinishiga qarab mavjudligini asoslash mumkin.

$$\sqrt{\lambda a} = \gamma_n, \quad \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \quad n \in N.$$

Demak, xos qiymatlar quyidagi ko'rinishda:

$$\lambda_1 = \left(\frac{\gamma_1}{a}\right)^2, \lambda_2 = \left(\frac{\gamma_2}{a}\right)^2, \lambda_3 = \left(\frac{\gamma_3}{a}\right)^2, \dots, \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \dots, \quad (8)$$

$\lambda = \lambda_n$  da (5) tenglamada quyidagi xos funksiyalarni topishimiz mumkin bo'ladi:

$$R_1(r) = J_0\left(\gamma_1 \frac{r}{a}\right), R_2(r) = J_0\left(\gamma_2 \frac{r}{a}\right), \dots, R_n(r) = J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \dots \quad (9)$$

A.Q.Urinov ustozning Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar kitobidan ma'lumki (9) funksiyalar sistemasi  $L_2(0, a)$  fazoda,  $r$  vazn bilan to'la va ortonormal hisoblanadi, ya'ni:

$$(R_1, R_2) = \int_0^a r \cdot R_1(r) R_2(r) dr = \int_0^a r \cdot J_0\left(\frac{\gamma_1 r}{a}\right) J_0\left(\frac{\gamma_2 r}{a}\right) dr = 0$$

$$\|R_1\|^2 = (R_1, R_1) = \int_0^a r \cdot R_1^2(r) = \int_0^a r \cdot J_0^2\left(\frac{\gamma_1 r}{a}\right) dr = \frac{1}{2} a^2 J_1^2(\gamma_1).$$

Endi keyingi masalani ko'rib chiqamiz: Dirixle masalasining xos funksiyalari, ya'ni (9) haqiqiy funksiyalar sistemasi bo'yicha  $f(r) = 1 - \frac{r^2}{a^2}$  funksiyani  $[0, a]$  oraliqda qatorga yoyish, masalasi bilan tanishamiz.

Yoyish koeffitsientini topamiz

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)$$

formulaga asosan

$$C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f(r) J_0(\gamma_n r/a) dr. \quad (10)$$

(10) integralni hisoblashda (1) tenglamadan foydalanish qulay hisoblanadi.

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{dr} \right) + \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2 r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) = 0,$$

$$r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) = -\left(\frac{a}{\gamma_n}\right)^2 \frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{dr} \right),$$

$$r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr = -\left(\frac{a}{\gamma_n}\right)^2 d\left( r \frac{d}{dr} J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) \right). \quad (11)$$

(11) tenglamani (10) ga qo'yib bo'laklab integrallasak, bizda

$$C_n = \frac{8}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)},$$

natijada,

$$1 - \frac{r^2}{a^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n r/a)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)}.$$

#### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949.
2. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. –М.: Мир, 1986
3. *А.Қ.Ўринов.* Махсус функциялар ва махсус операторлар. –Ф.: Ф.Н, 2012.