

PUASSON VA LAPLAS TENGLAMALARIGA KELITIRILADIGAN MASALALAR

Rajabova Muhayyo Shuhrat qizi

Buxora davlat texnika universiteti "Aniq fanlar" kafedrasida o'qituvchisi

Annotatsiya: *Mazkur maqolada xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy fundamental tushunchalaridan biri ko'p o'zgaruvchili ikkinchi tartibli tenglamalarni turlarga ajratish, Puasson va Laplas tenglamalariga keltiriladigan masalalar o'rganilgan.*

Kalit so'zlar: *Tor, tebranish, dekart koordinatalar sistemasi, ikkinchi tartibli tenglama urunma, taranglik kuchlari, tor tebranish tenglamasi, tezlik potentsiali*

Tor deganda erkin egiladigan ingichka ip tushuniladi, boshqacha aytganda, tor shunday qattiq jismki, uning uzunligi boshqa o'lchamlaridan ancha ortiq bo'ladi. Torning chekkli nuqtalari mahkamlangan, o'zi esa qattiq tortilgan bo'lsin. Agar tor muvozanat holatidan chetlashtirilsa tor tebrana boshlaydi. Biz tor tebranishini bir tekislikda ro'y beradi deb faraz qilamiz.

Bu tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini olamiz xOu . Ox o'qini torning boshlang'ich tinch holati bo'yicha yo'naltiramiz. U holda u torning muvozanat holatidan siljishini beradi. Tor tebranish jarayonida u -chetlanish x va t ga bog'liq bo'ladi ya'ni $u = u(x, t)$. Har bir fiksirlangan t vaqtda $u = u(x, t)$ funktsiya grafigi tor tebranishi grafigini beradi, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x(x, t)$ esa bu grafikning x nuqtasiga o'tkazilgan urinma burchak koeffitsiyentini beradi. Bu yyerda $u_t(x, t)$ - harakat tezligi $u_{tt}(x, t)$ harakat tezlanishi.

Bizning maqsadimiz tor harakatini beruvchi $u = u(x, t)$ funktsiyani qanoatlantiradigan tenglama tuzish. Buning uchun ba'zi bir cheklanishlar qilamiz.

1. Tor absayut egiluvchan. Torga ta'sir qilinib turgan taranglik kuchi yetarli katta deb faraz qilamiz. Shu sababli torning egilganda qarshiligini taranglikka nisbatan hisobga olmasa ham bo'ladi.

Agar torning biror nuqtadan bir tomonga yotuvchi qismi olib tashlansa, u holda olib tashlangan qismining ta'sirini almashtiruvchi taranglik kuchi. Shu nuqtada torning urunmasi bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

Torni cho'ziluvchan emas deb faraz qilamiz va u Guk qonuniga bo'ysinadi, ya'ni taranglik kuchini o'zgarish miqdori torning uzunligini o'zgarishiga proporsionaldir. Torni bir jinsli deb faraz qilamiz va uning chiziqli zichligini ρ (birlik uzunlikka to'g'ri keluvchi massa) orqali belgilaymiz.

Torga Ou o'qiga parallel kuchlar ta'sir etadi deb faraz qilamiz, ular tor bo'ylab harakat qiladi va x, t ga bog'liq, ularning zichligini $g(x, t)$ deb belgilaymiz.

Muhitning qarshilik kuchi e'tiborga olinmaydi. Biz faqat torning kichik

tebranishlarini o'rganamiz.

Agar $\alpha(x, t)$ orqali torning x nuqtasida t vaqtda o'tkazilgan urinmasini Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini belgilasak, u holda torning kichik tebranishi $\alpha^2(x, t) \approx 0$ (1) ekanligini ekanligi kelib chiqadi.

$\sin \alpha$ ning Makloren qatoriga yoyilmasiga asosan

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \text{ demak 1-shartga asosan}$$

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (2)$$

Bundan kelib chiqadiki

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx 2 \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{2}$$

munosabat o'rinli. Demak, $\cos \alpha \approx 1$.

$$tg \alpha - \sin \alpha = tg \alpha (1 - \cos \alpha) \approx 0$$

bu yerdan

$$tg \alpha \approx \sin \alpha.$$

$$\text{Lekin } \frac{\partial u}{\partial x} = tg \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx \alpha^2.$$

$$\text{Bu yerda } \overline{M_1 M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

ya'ni kichik tebranishlarda tor qismlari cho'zilmaydi va qisqarmaydi.

Endi taranglik kuchi T ni o'zgarmas ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni T ni x va t ga bog'liq emasligini isbotlaymiz. Buning uchun torning $M_1 M_2$ bo'lagini olamiz t momentda tashlab yuborilgan bo'laklar ta'sirini T_1 va T_2 taranglik kuchlari bilan almashtiramiz shartga ko'ra tor nuqtalari bir tekislikda harakat qilmoqda demak tashqi kuchlar ham Ou o'qiga parallel yo'nalishda ta'sir ko'rsatadi. Bu kuchlarning Ox o'qdagi proeksiyasi nolga teng

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

$$\cos \alpha_1 \approx 1, \cos \alpha_2 \approx 1$$

demak $T_1 = T_2 = M_1$ va M_2 nuqtalar uchun M_1 va M_2 nuqtalar ixtiyoriy bo'lgani uchun ixtiyoriy x uchun t momentga $T(x, t) = T(t)$.

Lekin Guk qonuniga ko'ra

$$T(t) = K(x_2 - x_1) = const,$$

$$T(x, t) = T_0 = const.$$

Endi tor tebranishi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun torning

cheksiz kichik M_1M_2 bo'lagini olamiz va uning Ox o'qdagi proeksiyasi $[x, x + \Delta x]$ bo'lsin. Unda taranglik kuchlari T_1 va T_2 ta'sir etadi. Bu kuchlarning Ou o'qdagi proeksiyasi $-T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 = T_0(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$.

Lekin

$$\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = u'_x(x, t)$$

$$\sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = u'_x(x + \Delta x, t)$$

$$\text{Demak, } T_0(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = T_0[u'_x(x + \Delta x, t) - u'_x(x, t)] = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

t momentda torning $\overline{M_1M_2}$ qismiga ta'sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning teng ta'sir etuvchisini F orqali belgilaymiz. Demak $F \approx g(x, t)\overline{M_1M_2} = g(x, t)dx$
 $g(x, t)$ - birlik uzunlikka ta'sir etuvchi kuchlar zichligi.

Endi M_1M_2 qism uchun Nyutonning ikkinchi qonunini qo'llaymiz. Bu qonunga ko'ra M_1M_2 uchastka massasini tezlanish ko'paytmasi. barcha ta'sir etuvchi kuchlar yig'indisiga teng. Agar ρ -tor zichligi bo'lsa, u holda

$$\rho \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x, t)dx$$

yoki dx ga qisqartirib

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t) \quad (3)$$

$$\text{bu yerda } a^2 = \frac{T_0}{\rho}.$$

(3) tenglamaga tor tebranish tenglamasi deyiladi yoki bir o'lchovli to'lqin tenglamasi deyiladi.

Faraz qilaylik, biror S sirt bilan chegaralangan D jism ichida bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik ma'lum $v(x, y, z)$ tezlik bilan statsionar harakatda bo'lsin. Agar suyuqlik bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik, ya'ni $\rho(x, y, z) = \text{const}$ bo'lsa, u holda $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\operatorname{grad} \rho = 0$, $\operatorname{grad} p = 0$ bo'ladi.

Agar suyuqlikning harakati uyurmali harakat bo'lmasa, u holda $v(x, y, z)$ tezlikning vektor maydoni potensial maydon bo'ladi, ya'ni biror skalyar maydonning gradienti

$$v = \operatorname{grad} \varphi(x, y, z) \quad (1.1)$$

Bu yerda $\varphi(x, y, z)$ tezlik potentsiali deyiladi. Agar D jism ichida suyuqlikning harakatga keltiruvchi manba bo'lmasa, u holda

$$\operatorname{div} v(x, y, z) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in D, \quad (1.2)$$

bo'ladi. Endi (1.1) formulani (1.2) ifodaga qo'ysak, quyidagi

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) \equiv \Delta \varphi = 0, \quad \forall (x, y, z) \in D$$

Laplas tenglamasiga ega bo'lamiz.

Demak, bir jinsli siqilmaydigan suyuqlikning uyurmali bo'lmagan harakatining tezlik potentsiali Laplas tenglamasini qanoatlantirar ekan.

D hajmli elektr o'tkazuvchan muhitda zichligi $j(x, y, z)$ bo'lgan statsionar elektr toki bo'lsin. Agar D muhit ichida tok manbai bo'lmasa, u holda

$$\operatorname{div} j(x, y, z) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in D, \quad (1.3)$$

bo'ladi. Om qonuniga asosan elektr maydoni E tok zichligi orqali $E = \frac{j}{\lambda}$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda λ muhitning elektr o'tkazuvchanligi.

Qaralayotgan D muhitda tok oqimi statsionar bo'lgani uchun undagi elektr maydoni potentsial (uyurmasiz) maydon bo'ladi, ya'ni D jismda $\varphi(x, y, z)$ skalyar maydon mavjud va u

$$E = -\operatorname{grad} \varphi(x, y, z), \quad (1.4)$$

formula bilan aniqlanadi. Xuddi yuqoridagi kabi (1.3) va 1.4) formulalardan

$$\Delta \varphi(x, y, z) = 0 \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

Demak, qaralayotgan muhitda elektr manbai bo'lmasa, u holda statsionar tokning elektr maydoni potentsiali Laplas tenglamasini qanoatlantirar ekan.

Agar massani hisobga olmaganda, tortishish maydoni potentsiali ham Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko'rish mumkin.

Oldingi bo'limda bir jinsli izotrop qattiq jismda ushbu

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t) \quad (1.5)$$

issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqargan edik.

Faraz qilaylik, qattiq jismning har bir nuqtasida bir xil $u(x, y, z, t)$ harorat o'rnatilgan bo'lsin va bu harorat ixtiyoriy t vaqtda o'zgarmas bo'lib qolsin.

U holda $u(x, y, z, t) = u(x, y, z)$ va $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ bo'ladi va (1.1) tenglama quyidagi

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{f(x, y, z)}{a^2}, \quad (1.6)$$

ko'rinishga keladi. Bu (1.6) tenglama Puasson tenglamasi deyiladi.

Agar qattiq jism ichida tashqi issiqlik manbalari bo'lmasa, u holda (1.6) tenglamada $f(x, y, z) = 0$ bo'ladi va ushbu

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (1.7)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama Laplas tenglamasi deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan, Puasson va Laplas tenglamalariga keltiriladigan masalalarning ahamiyati shundaki, ular orqali issiqlik, elektr, gravitatsiya, oqimlar tenglamalari aniq ifodalanadi.

Fizika, elektrotexnika, mexanika, aerodinamika, geofizika, kompyuter grafikasi, Dirixle, Noyman, Robin masalalari, optimizatsiya, minimal energiya tamoyillari, potensial maydon nazariyasida ularning ahamiyati juda katta.

Shu sababli, ular matematika va fizikaning deyarli barcha bo'limlarida markaziy tenglamalar hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами (Обзор, по-священный 275-летию АН СССР) // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 2. С. 171.

2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.

3. Лыков А.В. Некоторые аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности (Обзор) // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1969. № 2. С. 3.

4. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.

5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

6. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Изд-во РУДН, 1997. 446 с.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

8. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 656 с.

9. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // ИФЖ. 1965. Т. 9. № 3. С. 287.

10. Карташов Э.М. Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2019. Т. 14. № 24. С. 77.

11. Формалев В.Ф. Уравнения математической физики. М.: URSS, 2020. 646 с.

12. Колпациков В.А., Яновский С.Ю. Связанная динамическая задача термоупругости для полупространства с учетом тепловой памяти // ИФЖ. 1979. Т. 36. № 6. С. 1093.

13. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Задача с нелокальным условием на свободной границе. // Украинский математический журнал (2012), т.64, №1, стр.71-80.